

Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen

vom Fachbereich für Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Elmar Walhorn

aus Gütersloh

Eingereicht am 21. Februar 2002

Mündliche Prüfung am 25. Juni 2002

Berichter Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler
Prof. Dr. rer. nat. T. Sonar
Prof. Dr.-Ing. C.-C. Rossow

Braunschweig 2002

ISBN 3-926031-96-4

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. D. Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2002

Kurzfassung

Zur effizienten Analyse von starken, nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur wird ein monolithisches Berechnungsmodell entwickelt. Bei der Diskretisierung der Modellgleichungen der beiden Kontinua und der Kopplungsbedingungen wird die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode verwendet. Mit der einheitlichen Betrachtung von Raum und Zeit ist es möglich, das Fluidgebiet den Strukturverformungen kontinuierlich anzupassen. Das Modell ermöglicht Stabilitätsanalysen des gekoppelten Systems. Anhand von ausgewählten Beispielen wird die Effizienz und Anwendbarkeit des Verfahrens dokumentiert.

Abstract

For efficient analyses of strong, nonlinear interactions between fluid and structure a monolithic numerical model is developed. The space-time finite element method is applied for discretisation of both continua and the coupling conditions. The uniform approach in space and time allows a continuous adaptation of the fluid domain to the structural motion. Altogether a single set of equations is derived, which allows stability analyses of coupled problems. Selected examples confirm the efficiency and versatility of the model.

Danksagung

Ich bedanke mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Förderung mit einem dreijährigen Stipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs „Wechselwirkung von Struktur und Fluid“ an der Technischen Universität Braunschweig und beim Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) für ein dreimonatiges Auslandsstipendium an der School of Computational Sciences, George Mason University, Fairfax, Virginia, U.S.A. Darüber hinaus wurde der Druck dieser Arbeit von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

Elmar Walhorn

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Bezeichnungen | III |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Motivation | 1 |
| 1.2 Ziel der Arbeit | 2 |
| 1.3 Stand des Wissens | 2 |
| 1.4 Gliederung | 4 |
| 2 Modellbildung | 5 |
| 2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik | 5 |
| 2.1.1 Annahmen | 5 |
| 2.1.2 Betrachtungsweisen | 6 |
| 2.1.3 Kontinuumsmechanische Größen | 7 |
| 2.1.4 Bilanzgleichungen | 9 |
| 2.2 Strukturmodelle | 11 |
| 2.2.1 Starrkörper und Feder-Dämpfer | 11 |
| 2.2.2 2-Feld-Formulierung | 13 |
| 2.2.3 Gemischte Formulierung | 14 |
| 2.3 Fluidmodell | 15 |
| 2.3.1 Fluiddynamik | 15 |
| 2.3.2 Inkompressible NAVIER-STOKES-Gleichungen | 18 |
| 2.3.3 Kennwerte von Strömungen | 18 |
| 2.4 Fluid-Struktur-Kopplung | 20 |
| 2.4.1 Klassifizierung | 21 |
| 2.4.2 Kopplungsmodell | 22 |
| 3 Diskretisierung | 23 |
| 3.1 Raum-Zeit-Formulierung | 23 |
| 3.1.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Methode | 23 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.1.2 | Zeitdiskontinuierliches GALERKIN-Verfahren | 28 |
| 3.1.3 | Stabilisierung | 30 |
| 3.2 | Strukturdynamik | 36 |
| 3.2.1 | Starrkörper- und Feder-Dämpferelement | 36 |
| 3.2.2 | 2-Feld-Formulierung | 40 |
| 3.2.3 | Gemischte Formulierung | 43 |
| 3.3 | Fluiddynamik | 48 |
| 3.3.1 | GALERKIN-Formulierung | 49 |
| 3.3.2 | Stabilisierung | 50 |
| 3.3.3 | Veränderliches Fluidgebiet | 53 |
| 3.4 | Fluid-Struktur-Kopplung | 68 |
| 3.4.1 | Kopplungsstrategien | 68 |
| 3.4.2 | GALERKIN-Formulierung | 72 |
| 3.4.3 | Interface-Elemente | 73 |
| 3.5 | Lösungsverfahren | 75 |
| 3.5.1 | PICARD-Iteration | 75 |
| 3.5.2 | Gleichungslöser | 77 |
| 3.5.3 | Vorkonditionierung | 80 |
| 4 | Anwendungsbeispiele | 85 |
| 4.1 | Wirbelerregter starrer Kreiszylinder | 86 |
| 4.1.1 | Phänomene | 86 |
| 4.1.2 | Unverschieblicher Kreiszylinder | 87 |
| 4.1.3 | Elastisch gelagerter Kreiszylinder | 92 |
| 4.1.4 | Zusammenfassende Bewertung | 99 |
| 4.2 | Wirbelerregte elastische Platte | 101 |
| 4.2.1 | Starre Platte | 103 |
| 4.2.2 | Elastische Platte angeströmt mit $\bar{v}_1 = 31.5 \text{ cm/s}$. . . | 104 |
| 4.2.3 | Elastische Platte angeströmt mit $\bar{v}_2 = 51.3 \text{ cm/s}$. . . | 109 |
| 4.2.4 | Zusammenfassende Bewertung | 112 |
| 5 | Zusammenfassung | 115 |
| | Literaturverzeichnis | 117 |

Bezeichnungen

Allgemeine Notationen

| | |
|---------------------------|--|
| $d(\cdot)$ | Differenzial |
| $\partial(\cdot)$ | partielle Ableitung |
| $D(\cdot), (\dot{\cdot})$ | materielle Zeitableitung |
| $\nabla(\cdot)$ | Gradientenbildung – auch bei Vektoren |
| $\text{div}(\cdot)$ | Divergenzbildung |
| $\Delta(\cdot)$ | LAPLACE-Operator, Inkrement |
| $\delta(\cdot)$ | variationelle Größe |
| Ω | räumliches Gebiet |
| Γ | räumlicher Rand |
| Q | Raum-Zeit-Gebiet |
| P | Raum-Zeit-Rand |
| $\bar{(\cdot)}$ | vorgegebene Größe |
| $\tilde{(\cdot)}$ | lokale Größe |
| $\hat{(\cdot)}$ | diskreter Wert |
| $(\cdot),_{(\cdot)}$ | Kurzform der partiellen Ableitung |
| $(\cdot) \cdot (\cdot)$ | Skalarprodukt – verjüngt bei Matrizen und Vektoren ohne Transponiertzeichen |
| $(\cdot) : (\cdot)$ | doppeltes Skalarprodukt – zweifache Verjüngung |

Skalare

Skalare sind niemals mit fetten Buchstaben bezeichnet.

| | |
|---------------|--------------------------------|
| A | Amplitude |
| a | Konvektionsgeschwindigkeit |
| \mathcal{B} | materieller Körper |
| CFL | COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Zahl |
| c | Schallgeschwindigkeit, Beiwert |
| d | Dämpfung |

| | |
|---------------|---|
| E | Elastizitätsmodul |
| ε | Fehlerschranke |
| f | Frequenz, Kraft |
| φ | Winkel, Rotation |
| g | Erdbeschleunigung |
| h | charakteristische Elementlänge |
| I | Zeitintervall |
| k | Steifigkeit |
| κ | Diffusionskoeffizient |
| L | Längenmaß |
| m | Masse |
| Ma | MACH-Zahl |
| μ | dynamische Zähigkeit |
| \mathcal{M} | materieller Punkt |
| N_i | Ansatzfunktion des i -ten Knotens |
| ν | kinematische Zähigkeit |
| p | Druck |
| q | Staudruck |
| Re | REYNOLDS-Zahl |
| St | STROUHAL-Zahl |
| T | Zeitintervall, Periode |
| t | Zeitkoordinate |
| τ | lokale Zeitkoordinate, Stabilisierungsparameter |
| V | Geschwindigkeitsmaß |
| ω | Rotationsgeschwindigkeit, Eigenkreisfrequenz |
| θ | Temperatur |

Vektoren

Vektoren sind mit fetten Kleinbuchstaben bezeichnet.

| | |
|----------------------|---------------------------------|
| b | Beschleunigung, rechte Seite |
| n | Normalenvektor |
| t | Randspannung |
| u | Verschiebung |
| v | Geschwindigkeit |
| v_N | Netzgeschwindigkeit |
| x | Raumkoordinate, Freiwertevektor |
| ξ | lokale Raumkoordinate |

Matrizen & Tensoren

Matrizen und Tensoren sind mit fetten Buchstaben bezeichnet, bei lateinischen zudem in Großbuchstaben.

| | |
|---------------------------|---|
| A | Systemmatrix |
| C | 4-stufiger Materialtensor |
| E | GREENScher Verzerrungstensor |
| $\varepsilon(\mathbf{u})$ | linearisierter GREENScher Verzerrungstensor |
| $\varepsilon(\mathbf{v})$ | Deformationgeschwindigkeit |
| F | Deformationsgradient |
| f | Kraftvektor |
| J | JACOBI-Matrix |
| M | Vorkonditionierer |
| S | 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor |
| σ | linearisierter CAUCHY-Spannungstensor |
| T | CAUCHY-Spannungstensor |
| \mathbf{T}^i | Transformationsmatrix des i -ten Knotens |

Indizes

Die angegebene Lage mit hoch- und tiefgestellt kann variieren.

| | |
|---------------------------|------------------------------------|
| $(\cdot)^C$ | Kopplungsgröße |
| $(\cdot)^D$ | DIRICHLET-Rand |
| $(\cdot)^F$ | Fluidgröße |
| $(\cdot)^N$ | NEUMANN-Rand |
| $(\cdot)^S$ | Strukturgröße |
| $(\cdot)_0$ | Größe in der Referenzkonfiguration |
| $(\cdot)_e$ | Elementgröße |
| $(\cdot)_n$ | Größe des n -ten Zeitintervalls |
| $\Gamma(\cdot), P(\cdot)$ | Rand mit vorgegebener Größe |

Hier nicht aufgeführte sowie abweichende Größen sind im Text definiert.

Nicht aufgeführte Einheiten in Abbildungen folgen aus dem Kontext.

Dezimalzahlen sind mit Punkt notiert.

1 Einleitung

1.1 Motivation

In vielen Anwendungsgebieten des Ingenieurwesens treten Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur auf. Beispiele aus dem konstruktiven Ingenieurbau sind filigrane Membrankonstruktionen und weitgespannte Brücken bei Windumströmung. Neben diesen klassischen Ingenieuraufgaben werden aufgrund des technischen Fortschritts aber auch neue Anwendungsgebiete z. B. aus der Biomechanik wie Blutströmungen in Arterien oder in künstlichen Herzen erschlossen. Fragestellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkungen zählen zur Klasse der Mehrfeldprobleme. Bei den genannten Anwendungen stehen die beteiligten Kontinua über ihren gemeinsamen Rand in Wechselwirkung. Demgegenüber stehen Prozesse, die innerhalb eines Gebiets in Wechselwirkung stehen, wie es beispielsweise bei Stoffabbauprozessen in Deponien mit Strömungen und chemischen Prozessen der Fall ist. Zur Simulation solcher Mehrfeldprobleme sind neue ganzheitliche Ansätze erforderlich. Bei der Simulation von Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur liegt ein Schwerpunkt auf der Modellierung und numerischen Behandlung der Kopplung beider Teilgebiete. Schwierigkeiten entstehen infolge der unterschiedlichen Betrachtungsweisen beider Kontinua. Klassisch werden in der Strukturmechanik die Zustandsgrößen von materiellen Punkten verfolgt (LAGRANGESche Betrachtungsweise), wogegen in der Fluidmechanik Zustandsänderungen an festen Raumpunkten betrachtet werden (EULERSche Betrachtungsweise). Zudem erschweren unterschiedliche Lösungsverfahren für Fluid und Struktur sowie getrennte Diskretisierungen in Raum und Zeit, d. h. semidiskrete Formulierungen, die Erfüllung der Bilanzgleichungen über den Kopplungsrand hinweg. Als Folge wird meist eine schwache Kopplung realisiert, bei der die nichtlinearen Gleichungen der Fluid- und Strukturmechanik nur explizit über Rand- bzw. Übergangsbedingungen gekoppelt sind und die Berechnung eines Zeitschritts ohne Iteration und gegenseitige Kopplung erfolgt. Selbst bei sehr kleinen Zeitschritten ist hierfür die Konvergenz der Lösung nicht sichergestellt. Diese gestaffelten Lösungsverfahren schränken

den Anwendungsbereich stark ein, z. B. sind Eigenwertanalysen nur für die Teilsysteme möglich.

Für zuverlässige Aussagen über den zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen und die Stabilität stark gekoppelter Systeme in Grenzsituationen sind daher Berechnungsmodelle notwendig, die das gekoppelte Gesamtsystem betrachten.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein ganzheitliches, monolithisches Berechnungsmodell zu entwickeln und zu erproben, das die Analyse von Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur ermöglicht. Wesentlich dabei ist die Berücksichtigung einer starken Kopplung, um starke, nichtlineare Wechselwirkungen berechnen zu können. Grundlage des Berechnungsmodells ist die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode. Mit ihr lassen sich die Modellgleichungen beider Kontinua und die Kopplungsbedingungen einheitlich diskretisieren und implementieren. Mit den raum- und zeitabhängigen Ansatzfunktionen des isoparametrischen Elementkonzepts können die verschiedenen Betrachtungsweisen elegant zusammengeführt werden. Zur Untersuchung starker Wechselwirkungen sind bei der Strukturmodellierung große Verschiebungen zu berücksichtigen. Um Grenzschichten und Wirbelablösungen untersuchen zu können, sind auf der Seite des Fluids viskose Strömungen zu berücksichtigen. Hierzu dienen die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen. Neben der Berechnung der instationären, gekoppelten Systemantwort soll das Berechnungsmodell eine Stabilitätsanalyse des gekoppelten Systems zulassen.

1.3 Stand des Wissens

Mit Aufkommen der elektronischen Datenverarbeitung im letzten Jahrhundert begann die Entwicklung computerorientierter numerischer Berechnungsverfahren. Für Aufgabenstellungen der Struktur- und Strömungsmechanik wurden zahlreiche Verfahren entwickelt.

Während der Bereich der Strukturmechanik von der Finite-Element-Methode dominiert wird, ist die Strömungsmechanik von einer Vielzahl von Verfahren geprägt. Der Grund hierfür liegt in den phänomenologisch verschiedenartigen Aufgabenstellungen, die von der Berechnung eines stationär umströmten zweidimensionalen Flügelprofils bis hin zur Vorhersage des Weltklimas reichen. Bei der Strömungssimulation findet somit eine Vielzahl von

Modellen Verwendung, die mit ihren Charakteristiken häufig sehr spezielle Anforderungen an das numerische Verfahren stellen. Historisch betrachtet wurde zuerst die Finite-Differenzen-Methode [25] zur Lösung strömungsmechanischer Aufgabenstellungen angewandt. Bei ihr werden auf strukturierten Gittern Ableitungen mit Differenzenausdrücken approximiert. Die Finite-Volumen-Methode [23] als nachfolgendes Verfahren dominiert noch heute in Anwendung und Forschung. Sie erfüllt die Bilanz der Volumenströme über die Zellenränder eines Finite-Volumen-Netzes auf strukturierten wie auch auf unstrukturierten Netzen exakt. In den letzten Jahrzehnten findet die Finite-Element-Methode [84] in der Forschung wie auch in der Anwendung vermehrt Aufmerksamkeit. Sie überführt die partiellen Differenzialgleichungen in eine Variationsformulierung und approximiert die Verläufe der Zustandsgrößen mit Ansatzfunktionen im Element. Daneben werden für spezielle Aufgabenstellungen die *Volume of Fluid*-Methode und andere Verfahren entwickelt.

Da die Literatur zu den betrachteten Anwendungsgebieten sehr umfangreich ist, sollen die im Folgenden angegebenen Literaturstellen einen Überblick geben und erheben nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.

Für das hier entwickelte Berechnungsmodell wird die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode zur einheitlichen Diskretisierung der Modellgleichungen in Raum und Zeit eingesetzt. In den sechziger Jahren sind erste Arbeiten über die Raum-Zeit-Formulierung entstanden. In der Strukturdynamik werden von HUGHES & HULBERT in [34] erstmals umfangreiche analytische Konvergenzuntersuchungen der Raum-Zeit-Formulierung durchgeführt, auf der zwei weitere [37, 38] von HULBERT aufbauen. In den neunziger Jahren entstanden zahlreiche weitere Arbeiten [6, 26, 46, 56, 78, 80], die unter anderem auch adaptive Verfahren behandeln.

Im Bereich der Fluidodynamik wird die Raum-Zeit-Formulierung vor allem von den Arbeitsgruppen um HUGHES [67, 68] und TEZDUYAR [9, 72, 73] für die Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen eingesetzt. Die Anwendung auf zeitlich veränderlichen Gebieten wird ebenfalls von HANSBO [27–29] eingehend verfolgt. BÜRGISSE [16] simuliert bei praxisrelevanten Ingenieurbauwerken wie Wehren Strömungen mit freien Wasseroberflächen. Die Raum-Zeit-Formulierung des mitbewegten Fluidgebiets ist vergleichbar mit einer klassischen ALE-Formulierung [36, 59]. Darüber hinaus sind in den vergangenen Jahren erste Arbeiten [19, 26, 31, 32, 65, 78] zu gekoppelten Systemen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung und starker Kopplung entstanden.

Die Literatur über Fluid-Struktur-Kopplung mit semidiskreten Formulierungen ist ebenfalls sehr reichhaltig und bezieht sich zumeist auf spezielle Aufgabenstellungen wie beispielsweise einen wirbelerregten, starren Kreiszylinder.

Zudem werden in der Regel partitionierte Verfahren [70, 77] verwendet, mit denen es möglich ist, bereits vorhandene Berechnungsmodelle und Computerprogramme weiter zu nutzen. Die häufig notwendige Berücksichtigung einer starken Kopplung [1, 10] ist numerisch sehr aufwändig, so dass Verfahren zur Effektivitätssteigerung [70] erforscht werden. Bei der Untersuchung praxisrelevanter Aufgabenstellungen wird häufig von kleinen Wechselwirkungen ausgegangen, um eine schwache Kopplung verwenden zu können. Das sich infolge der Strukturverformungen verändernde Fluidgebiet wird dabei mit einer ALE-Formulierung [36, 59] im Berechnungsmodell berücksichtigt.

1.4 Gliederung

Ein Schwerpunkt der Arbeit ist die Modellbildung in Kapitel 2. Aufbauend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen werden die verwendeten Modelle für die Struktur- und Fluidodynamik beschrieben. Zudem werden Phänomene von viskosen Strömungen eingeführt, die bei den Anwendungen untersucht werden. Das Kopplungsmodell zur Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur im Berechnungsmodell beschließt das Kapitel.

Die Diskretisierung der Modellgleichungen erfolgt mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode in Kapitel 3. Anhand der räumlich eindimensionalen Konvektions-Diffusions-Gleichung wird die Raum-Zeit-Formulierung zusammen mit der benötigten Stabilisierung hergeleitet, bevor sie auf die anderen Modelle angewendet wird. Neben der Diskussion besonderer Aspekte der Modelle, wie beispielsweise freie Oberflächen, werden begleitend zur Verifikation numerische Untersuchungen in Form von Stabilitäts- und Genauigkeitsuntersuchungen durchgeführt. Im letzten Abschnitt wird auf die numerischen Lösungsverfahren für das gekoppelte, nichtlineare Gleichungssystem eingegangen.

Zur Verifikation und Validierung der in der Arbeit vorgestellten Verfahren werden in Kapitel 4 an ausgewählten Beispielen numerische Analysen von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen vorgestellt, so dass eine Bewertung des Berechnungsmodells möglich ist.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung in Kapitel 5.

2 Modellbildung

In diesem Kapitel wird die Modellbildung als Grundlage der Diskretisierung, die im weiteren Verlauf der Arbeit dargestellt wird, betrachtet. Aufbauend auf den Grundlagen der Kontinuumsmechanik im ersten Abschnitt sind die verwendeten Fluid- und Strukturmodelle in den Abschnitten 2.2 und 2.3 dargestellt. Abschnitt 2.4 beschreibt das Modell zur Kopplung von Fluid und Struktur.

2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Dieser Abschnitt stellt die Annahmen, Vereinbarungen und Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik zusammenfassend dar, die zur Herleitung der Fluid- und Strukturmodelle notwendig sind. Die Notation folgt im Wesentlichen STEIN & BARTHOLD [69]. Für ausführlichere Darstellungen sei auf die Literatur verwiesen, wie z. B. [21, 69] für die Elastizitätstheorie und [11] für die Tensorrechnung.

2.1.1 Annahmen

Wesentlich für die Kontinuumsmechanik ist die Betrachtung eines materiellen Körpers \mathcal{B} bzw. eines Kontinuums als zusammenhängende Menge materieller Punkte \mathcal{M} , wobei diese ihre lokal identischen Eigenschaften durch Idealisierung der realen Struktur erhalten. Der Begriff *lokal* ist auf die Umgebung eines Punktes bezogen.

Zur Formulierung der Modellgleichungen erfolgt die Betrachtung von homogenen, isotropen Körpern innerhalb eines BOLTZMANN-Kontinuums, d. h. alle materiellen Punkte besitzen identische, richtungsunabhängige Eigenschaften, und jeder einzelne Punkt vollzieht allein translatorische Bewegungen. Dem Kontinuitätsprinzip folgend behalten die materiellen Punkte ihren kontinuierlichen Zusammenhang während einer Bewegung bei. Weiterhin sind

sie zu jedem Zeitpunkt eindeutig einzeln identifizierbar, was zu einer deterministischen Theorie führt.

2.1.2 Betrachtungsweisen

Um die Bewegung materieller Punkte \mathcal{M} zu beschreiben, ist es hilfreich, eine Referenz- und Momentankonfiguration einzuführen. Während in der Referenzkonfiguration der materielle Körper \mathcal{B} zum festen Zeitpunkt $t = t_0$ betrachtet wird, befindet sich der Körper zum aktuellen Zeitpunkt $t > t_0$ in der Momentankonfiguration. Zusammen mit der stetigen, bijektiven Abbildung χ , siehe Abbildung 2.1, eines materiellen Punktes auf einen Raum-

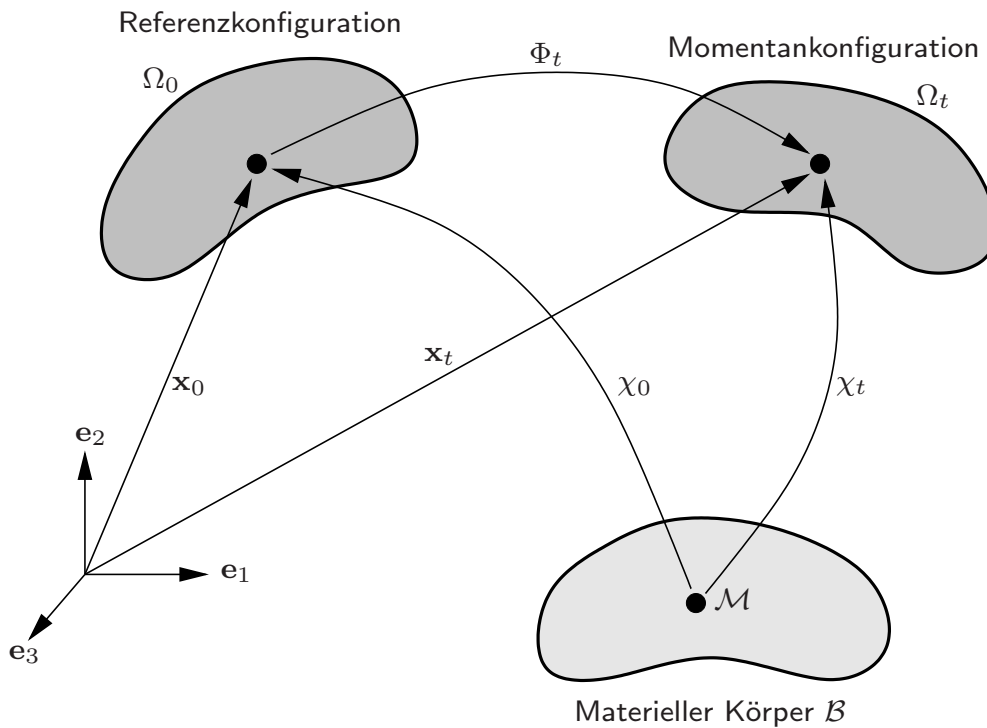


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration

punkt \mathbf{x} folgt daraus: Ein materieller Punkt \mathcal{M} , der sich zur Referenzzeit t_0 am Ort \mathbf{x}_0 befindet, nimmt zum aktuellen Zeitpunkt $t > t_0$ den Ort \mathbf{x}_t ein. Die Bewegung eines materiellen Punktes kann nun ausgehend von der Referenzkonfiguration mit der Abbildung Φ_t hin zur Momentankonfiguration erfolgen, siehe Abbildung 2.1. Das räumliche Gebiet und dessen Rand erhalten die Notationen Ω und Γ . Bei der Notation von Größen in der Referenzkonfiguration wird der Index 0 immer gesetzt, während der Index t im Weiteren nur selten zur Hervorhebung gesetzt wird.

Mit der Wahl des Beobachters dieser Bewegung können die beiden hier verwendeten Betrachtungsweisen – die LAGRANGESche und die EULERSche – eingeführt werden. In der materiellen oder LAGRANGESchen Betrachtungsweise erfolgt die Betrachtung ausgehend von der Referenzkonfiguration, so dass die Lage eines Raumpunktes zum Zeitpunkt t mit

$$\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{x}_0) \quad (2.1)$$

bestimmt ist. Anschaulich bedeutet dies: Der Beobachter verfolgt den Zustand jedes einzelnen materiellen Punktes \mathcal{M} auf seiner Bahn durch den Raum. Die Strukturmodelle verwenden diese Betrachtungsweise.

Hingegen wird in der räumlichen oder EULERSchen Betrachtungsweise die Bewegung ausgehend von der Momentankonfiguration verfolgt. Damit ist die Lage eines Raumpunktes in der Referenzkonfiguration mit

$$\mathbf{x}_0 = \Phi_t^{-1}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

eindeutig bestimmt. Demnach betrachtet ein Beobachter an jedem einzelnen Raumpunkt den Zustand der materiellen Punkte \mathcal{M} , die im Verlauf der Zeit diesen Ort einnehmen. Diese Betrachtungsweise wird beim Fluidmodell angewendet, wobei nicht davon ausgegangen wird, dass die Abbildung Φ_t und ihre Inverse für jeden Raumpunkt und zu jeder Zeit bekannt sind. So wird in der Regel ein ortsfestes Kontrollvolumen betrachtet, in dem materielle Punkte ein- und austreten können. Ein anschauliches Beispiel ist eine Rohrströmung, bei der nur der Durchfluss durch das Rohr von Interesse ist und ein materieller Punkt nur innerhalb des Rohres eindeutig identifiziert ist.

Ist das Kontrollvolumen nicht ortsfest, so bewegt sich der Betrachter im Raum mit, wobei er nicht die Bahn eines materiellen Punktes beschreiben muss. Diese relative Betrachtungsweise ist für Fluide mit freier oder einer Strukturverschiebung folgenden Oberfläche notwendig. In den Grenzbereichen geht die relative Betrachtungsweise in die LAGRANGESche oder in die EULERSche Betrachtungsweise über.

2.1.3 Kontinuumsmechanische Größen

Materielle Zeitableitung

Eine physikalische Eigenschaft eines beliebigen materiellen Punktes \mathcal{M} sei in Abhängigkeit der Zeit t durch die Funktion Ψ beschrieben. Je nach gewählter Betrachtungsweise ist die Funktion in ihren materiellen Koordinaten

$\Psi = \Psi(\mathbf{x}_0, t, t_0)$ oder räumlichen Koordinaten $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$ gegeben. Die materielle Zeitableitung $\frac{D\Psi}{Dt} = \dot{\Psi}$ beschreibt die zeitliche Änderung der physikalischen Größe eines beliebigen materiellen Punktes. Sie nimmt in materieller Darstellung die Form

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (2.3)$$

an. In der räumlichen Darstellung folgt sie zu

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Psi \quad (2.4)$$

und setzt sich damit aus der lokalen Zeitableitung $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ und der konvektiven Zeitableitung $\mathbf{v} \cdot \nabla\Psi$ zusammen, wobei $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ die Geschwindigkeit des materiellen Punktes ist.

Kinematische Maße

Die räumliche Lageänderung eines einzelnen materiellen Punktes \mathcal{M} zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration ist die Verschiebung

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad , \quad (2.5)$$

wobei eine zusätzliche Verschiebung \mathbf{u}_0 in der Referenzkonfiguration bei den Strukturmodellen berücksichtigt ist. Die lineare Abbildung eines infinitesimalen Wegelements von der Referenz- in die Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (2.6)$$

erfolgt mit dem materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} \quad . \quad (2.7)$$

Er beschreibt den Deformationszustand eines materiellen Punktes \mathcal{M} eindeutig. Als Verzerrungsmaß für die konstitutiven Beziehungen der Strukturmodelle ist aber der GREENsche bzw. GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.8)$$

besser geeignet. Er beschreibt Starrkörperbewegungen verzerrungsfrei und ist zudem richtungsunabhängig und symmetrisch.

Die Betrachtung ausschließlich kleiner Verschiebungen führt in der geometrisch linearen Theorie auf den linearisierten GREENSchen Verzerrungstensor

$$\varepsilon_0(\mathbf{u}) = \text{Lin}[\mathbf{E}]_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \left(\nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \right) . \quad (2.9)$$

Im Gegensatz zu den Strukturmodellen gehen beim Fluidmodell nicht die Verzerrungen, sondern die Verzerrungsgeschwindigkeiten in der Form

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) \quad (2.10)$$

in die konstitutive Beziehung ein.

2.1.4 Bilanzgleichungen

Masse

Ist der materielle Körper \mathcal{B} ein abgeschlossenes System, dessen Masse m zeitinvariant ist, d. h. es gilt $m = \text{konstant}$, so folgt mit der Dichte ρ die lokale Form der Massenerhaltung in der Momentankonfiguration zu

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 . \quad (2.11)$$

Sie wird im Weiteren als *Kontinuitätsbedingung* bezeichnet.

Im Fluidmodell wird die Massenerhaltung nur lokal gefordert. Global wird die Erfüllung der Massenbilanz gefordert, d. h. in einem veränderlichen Kontrollvolumen muss die Massenänderung innerhalb des Kontrollvolumens mit dem Massenzufluss durch die Oberfläche im Gleichgewicht stehen.

Impuls

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem ein materieller Körper \mathcal{B} , der keinen äußeren Kräften unterliegt, entweder in Ruhe verharrt oder seinen geradlinigen, gleichförmigen Bewegungszustand nicht ändert. In einem solchen System gilt für den Körper die globale Impulsbilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{x}} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma . \quad (2.12)$$

Sie besagt, dass die Änderung der Bewegungsgröße

$$\mathbf{I} = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{x}} d\Omega \quad (2.13)$$

gleich der Summe der von außen auf den Körper wirkenden Volumen- und Oberflächenkräfte ist. Die Größen $\bar{\mathbf{b}}$ und $\bar{\mathbf{t}}$ stehen für die einwirkende Beschleunigung und die aufgetragenen Oberflächenspannungen.

Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (2.14)$$

zur Berechnung des inneren Spannungsvektors \mathbf{t} aus dem CAUCHYschen Spannungstensor \mathbf{T} in einer Schnittfläche mit der äußeren Normalen \mathbf{n} folgt die lokale Impulsbilanz in der Momentankonfiguration zu

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Transformiert in die Referenzkonfiguration folgt

$$\operatorname{div}_0 (\mathbf{FS}) + \rho_0 (\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

mit dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.17)$$

Zur geometrisch linearen Formulierung ist eine Linearisierung der Spannungstensoren notwendig. Sie führt auf den linearisierten Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{Lin} [\mathbf{T}]_{\mathbf{u}} = \operatorname{Lin} [\mathbf{FS}]_{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

Drehimpuls

In einem BOLTZMANN-Kontinuum im Inertialsystem ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\mathbf{L} = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} d\Omega \quad (2.19)$$

eines Körpers \mathcal{B} gleich der Summe aller auf ihn von außen einwirkenden Momente. Hieraus folgt die Symmetrie des CAUCHYschen und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors, d. h. es gilt

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.20)$$

2.2 Strukturmodelle

Dieser Abschnitt beschreibt die drei hier verwendeten Strukturmodelle. Neben einem Modell für Starrkörper in Abschnitt 2.2.1 sind zwei Modelle zur Beschreibung elastischer Festkörper in den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 erläutert.

2.2.1 Starrkörper und Feder-Dämpfer

Zur Untersuchung von Schwingungsphänomenen sich wenig deformierender Körper, wie z. B. Seil- oder Brückenquerschnitte im Wind, ist es im Allgemeinen ausreichend, einen elastisch gelagerten Starrkörper als Modell anstelle eines elastischen Festkörpers zu verwenden. Das Berechnungsverfahren ist damit numerisch effektiver und stabiler. Die Darstellung der Modellgleichung des elastisch gelagerten Starrkörpers erfolgt für den räumlich zweidimensionalen Fall.

Starrkörper

Mit der kinematischen Restriktion der Unverschieblichkeit einzelner Punkte eines Starrkörpers gegeneinander ist es stellvertretend für den gesamten Körper möglich, die Kinetik eines einzelnen Massepunktes im Schwerpunkt des Körpers zu betrachten, siehe Abbildung 2.2. Die Impulsbilanz des Starrkörpers folgt direkt aus der globalen Impulsbilanz (2.12) zu

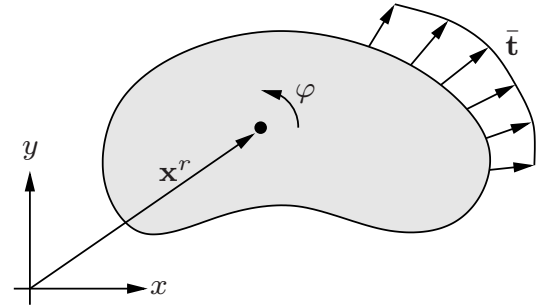


Abbildung 2.2: Starrkörpermodell

$$\bar{\mathbf{f}} - m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad I . \quad (2.21)$$

Darin ist m die Gesamtmasse des Körpers, und $\bar{\mathbf{f}}$ stellt die rechte Seite von (2.12) und somit die Resultierende der äußeren Kräfte dar. Das betrachtete Zeitintervall wird mit $I = [0, T]$ bezeichnet. Weiter sind die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}}$ durch die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{v}}$ ausgedrückt, um eine einheitliche und konsistente Formulierung bezüglich der Zustandsgrößen der anderen Modellgleichungen, insbesondere des Fluids, zu ermöglichen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in der Differenzialgleichung

(2.21) und im Folgenden nicht explizit die Zeitabhängigkeit der angreifenden Kräfte $\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}(t)$ angeben.

Sollen Rotationen um den Schwerpunkt des Starrkörpers beschrieben werden, so folgen sie der Gleichung

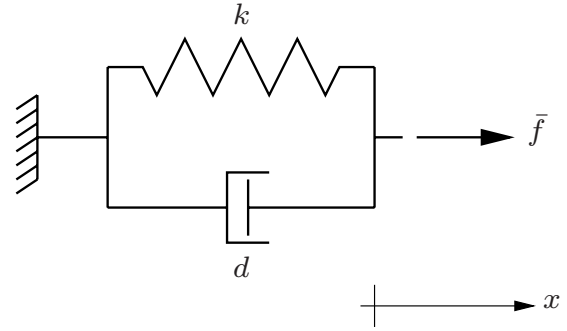
$$\bar{f}_m - \Theta \dot{\omega} = 0 \quad \text{in} \quad I \quad (2.22)$$

mit dem angreifenden Moment \bar{f}_m , der Rotationsträgheit Θ und der Rotationsgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$.

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe sind als Anfangsbedingungen die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ und die Rotationsgeschwindigkeit $\omega(t_0) = \omega_0$ vorzugeben.

Feder-Dämpfer

Zur Simulation elastisch gelagerter Strukturen, insbesondere von Starrkörpern, wird ein Feder-Dämpfermodell benötigt, wie es in der nebenstehenden Abbildung 2.3 skizziert ist. Das räumlich eindimensionale Modell beruht auf einer gemischten Formulierung mit den Zustandsgrößen Geschwindigkeit v und Federkraft f .



Das Kräftegleichgewicht folgt mit der Dämpfungskraft $f_d = d v$ zu

Abbildung 2.3: Feder-Dämpfermodell

$$\bar{f} - f - f_d = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Die Federkraft f ist mit der konstitutiven Beziehung

$$f = k u \quad (2.24)$$

über die Federsteifigkeit k mit der Verschiebung u verknüpft. Mit zeitlicher Ableitung der konstitutiven Beziehung und Substitution von $v = \dot{u}$ wird sie als Ratengleichung

$$\dot{f} = k v + \dot{k} u \quad (2.25)$$

formuliert.

Eine zeitlich veränderliche Federsteifigkeit wird an dieser Stelle nicht angenommen, womit der letzte Term $\dot{k} u$ in (2.25) entfällt. Bei der Diskretisierung

wird wieder eine zeitlich veränderliche Federsteifigkeit im Verfahren berücksichtigt.

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe ist als Anfangsbedingung die Federkraft $f(t_0) = f_0 = k u_0$ vorzugeben.

Die Ableitung einer Rotationsfeder verläuft analog zur Ableitung der Verschiebungsfeder. Einzig die Zustandsgrößen (Verschiebung u , Geschwindigkeit v und Kraft f) und die zugehörigen Materialparameter sind durch rotatorische Größen (Rotation φ , Rotationsgeschwindigkeit ω und Moment f_m) zu ersetzen.

2.2.2 2-Feld-Formulierung

Das erste Strukturmodell zur Beschreibung elastischer Festkörper basiert auf der geometrisch linearen Elastizitätstheorie mit einer 2-Feld-Formulierung in Verschiebungen \mathbf{u} und Geschwindigkeiten \mathbf{v} . Es erweitert die klassische Formulierung der Elastizitätstheorie im statischen Fall hin zu der hier verwendeten Raum-Zeit-Formulierung der Elastodynamik.

Zur Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe ist eine konstitutive Beziehung zu definieren, die eine Verknüpfung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen herstellt. Angenommen wird die lineare Beziehung

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.26)$$

mit dem vierstufigen Materialtensor \mathbb{C} . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfolgt hier der Übergang zum ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material. Es beschreibt mit zwei Konstanten, den LAMÉ-Konstanten, den Materialtensor für ein homogenes, isotropes, hyperelastisches Material bei großen Verschiebungen und kleinen Verzerrungen.

Die Linearisierung der konstitutiven Beziehung (2.26) führt auf das HOOKEsche Werkstoffgesetz

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.27)$$

In der Literatur, z. B. [69], findet sich die Transformation der LAMÉ-Konstanten auf die gebräuchlicheren und in Versuchen messbaren Größen Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν sowie die Komponenten des Materialtensors.

Die 2-Feld-Formulierung beinhaltet die zwei Feldgleichungen

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho_0 \dot{\mathbf{v}} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } Q_0 \quad , \quad (2.28a)$$

$$\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{in } Q_0 \quad . \quad (2.28b)$$

Die erste Feldgleichung (2.28a) ist die lokale Impulsbilanz unter Verwendung der Geschwindigkeit anstelle der Verschiebung im Trägheitsterm $\rho_0 \ddot{\mathbf{x}}$. Zur Kopplung der beiden Zustandsgrößen \mathbf{u} und \mathbf{v} ist die zweite Feldgleichung (2.28b) notwendig. Das Raum-Zeit-Gebiet $Q_0 = \Omega_0 \times I$, in dem die Feldgleichungen gültig sind, bildet sich aus dem räumlichen Referenzgebiet Ω_0 und dem betrachteten Zeitintervall I .

Zur Lösung des aus (2.28a) und (2.28b) gebildeten Differenzialgleichungssystems sind Anfangsbedingungen für Verschiebungen und Geschwindigkeiten mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in} \quad \Omega_0 \quad (2.29)$$

und Randbedingungen auf dem DIRICHLET-Rand

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{auf} \quad P_0^D = \Gamma_0^D \times I \quad (2.30)$$

und auf dem NEUMANN-Rand

$$\mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf} \quad P_0^N = \Gamma_0^N \times I \quad (2.31)$$

zu erfüllen.

2.2.3 Gemischte Formulierung

Die gemischte Formulierung zeichnet sich nach der Diskretisierung in Abschnitt 3.2.3 im Vergleich zur 2-Feld-Formulierung besonders dadurch aus, dass sie ausschließlich Geschwindigkeiten als globale Freiwerte besitzt und zur Berechnung plattenartiger Bauteile günstiger ist.

Die Formulierung basiert auf der geometrisch nichtlinearen lokalen Impulsbilanz (2.16) in der Referenzkonfiguration. Die Feldgleichungen folgen zu

$$\text{div}_0 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) - \rho_0 \dot{\mathbf{v}} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad Q_0, \quad (2.32a)$$

$$\mathbb{C}^{-1} : \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad Q_0. \quad (2.32b)$$

Die zweite Feldgleichung (2.32b) stellt die konstitutive Beziehung (2.26) nach zeitlicher Ableitung als Rate dar. Die zeitliche Ableitung des GREENSchen Verzerrungstensors folgt mit der Kettenregel zu

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla_0 \mathbf{v} + (\nabla_0 \mathbf{v})^T + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \mathbf{v} + (\nabla_0 \mathbf{v})^T \nabla_0 \mathbf{u} \right). \quad (2.33)$$

Die Anfangs-Randwertaufgabe wird vervollständigt durch Anfangsbedingungen in der Referenzkonfiguration für Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

und Spannungen

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbb{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}_0) \quad (2.35)$$

sowie durch Randbedingungen für Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{auf} \quad P_0^D \quad (2.36)$$

und Randspannungen

$$\mathbf{t}_0 = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{n}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf} \quad P_0^N \quad . \quad (2.37)$$

2.3 Fluidmodell

Das Fluidmodell basiert auf den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen [30, 75]. Die Grundlagen der Gleichungen sowie die mit ihnen beschreibbaren Phänomene und deren Grenzen sind in Abschnitt 2.3.1 erläutert. Im nachfolgenden Abschnitt 2.3.2 ist die Anfangs-Randwertaufgabe definiert. Die verwendeten Kenngrößen von Strömungen sind in Abschnitt 2.3.3 zusammengestellt.

2.3.1 Fluiddynamik

Für Fluide gelten dieselben Grundgleichungen – Massen-, Impuls- und Drehimpulsbilanz – wie für elastische Festkörper. Trotzdem treten bei Strömungen und Strukturen im Allgemeinen ganz andere Phänomene auf, so dass die Modellbildung dies als Grundlage der numerischen Näherungsverfahren zu berücksichtigen hat.

Die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Strukturmodelle verwenden eine LAGRANGESche Betrachtungsweise, bei der die Bahn und der Zustand jedes einzelnen materiellen Punktes \mathcal{M} verfolgt wird. Bei strömungsmechanischen Aufgabenstellungen ist es meist uninteressant, die Eigenschaften eines einzelnen Punktes zu verfolgen. Normalerweise ist ein räumliches Gebiet, das Kontrollvolumen, von Interesse, durch das ein Fluid hindurchströmt. Als Betrachtungsweise bietet sich daher die in Abschnitt 2.1.2 beschriebene EULERSche Betrachtungsweise an. Als Folge beinhaltet die materielle Zeitableitung (2.4) einer Zustandsgröße – hier der Geschwindigkeit \mathbf{v} – eines materiellen Punktes

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.38)$$

einen konvektiven Term $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, der bei der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit nichtlinear ist.

Im Gegensatz zu Strukturen nehmen Fluide in Ruhelage keine deviatorischen Spannungen bzw. Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}$ auf. Der Spannungsverlauf wird in Ruhelage allein durch die hydrostatische Druckverteilung bestimmt. Somit treten Schubspannungen nur bei der Veränderung der gegenseitigen räumlichen Lage der materiellen Punkte auf, so dass zur Beschreibung des Fluidmodells die Geschwindigkeit \mathbf{v} als Zustandsgröße gewählt wird.

In dieser Arbeit werden NEWTONsche Fluide betrachtet, für die als konstitutive Beziehung ein linearer Zusammenhang zwischen den Verzerrungsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ und den Schubspannungen

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (2.39)$$

mit der dynamischen Zähigkeit μ besteht, vgl. CURRIE [17]. Insgesamt ist der Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - p \mathbf{I} \quad (2.40)$$

abhängig von den Verzerrungsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ und dem Druck p .

Weiter sollen Strömungen betrachtet werden, bei denen Temperatur- und Dichteänderungen vernachlässigbar sind, wie es im klassischen Ingenieurbau der Fall ist. Strömungen von Fluiden mit einer MACH-Zahl, siehe (2.49), von $Ma \leq 0.3$ weisen eine Dichteänderung auf, die kleiner als 5% ist. Sie können somit als inkompressibel angesehen werden, so dass die Kontinuitätsgleichung (2.11) übergeht in die Forderung eines divergenzfreien Strömungsfeldes

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.41)$$

Als Folge ist die Schallgeschwindigkeit im Fluid unendlich groß, so dass lokal hervorgerufene Änderungen im Druckfeld unmittelbar Einfluss auf das gesamte Druckfeld haben.

Bei der Untersuchung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen sind Fluidbereiche in der Nähe einer Struktur oder festen Wand von besonderem Interesse. Haften die materiellen Punkte des Fluids infolge der Zähigkeit und der Oberflächenrauigkeit auf der Strukturoberfläche, so ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit des ungestörten Bereichs \mathbf{v}_∞ in Oberflächennähe hin zur Geschwindigkeit der Struktur \mathbf{v}^S . Es kommt zur Ausbildung einer Grenzschicht, wie sie in Abbildung 2.4 schematisch für eine längsangeströmte ebene Platte dargestellt ist.

Als Grenzschichtdicke wird der Abstand zur Struktur definiert, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit nur noch 1% von der ungestörten Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_∞ abweicht, vgl. SCHLICHTING [64]. Durch die hohen Deformationsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ treten in der Grenzschicht nach (2.39)

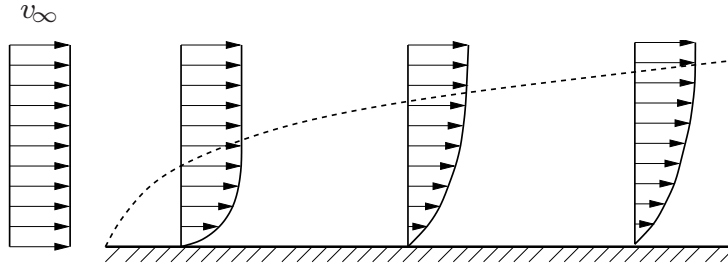


Abbildung 2.4: Grenzschicht an einer Platte

Schubspannungen τ auf. Sie wirken zusätzlich zum Druck p als Belastung auf die angrenzende Struktur, sind aber im Vergleich zu diesem meist klein.

Weiter hängt die Ausbildung und Ablösung von Wirbeln stark von der Grenzschicht ab. Umströmt beispielsweise ein Fluid mit einer REYNOLDS-Zahl, siehe (2.47), von etwa $Re = 90 \div 500$ [53] einen Kreiszylinder, wie in Abbildung 2.5 dargestellt, so kommt es zur Ablösung der Grenzschicht. Es

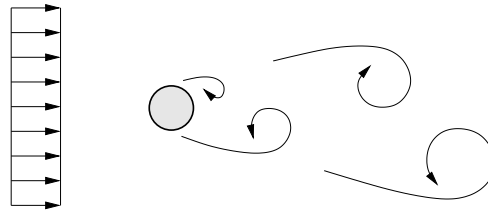


Abbildung 2.5: VON KÁRMÁNSche Wirbelstraße

entstehen in periodischer Abfolge an der Ober- und Unterseite des Zylinders Wirbel, die mit der Strömung transportiert werden. Dieses Strömungsphänomen wird mit dem Begriff *von Kármánsche Wirbelstraße* bezeichnet. In Abschnitt 4.1 wird das Phänomen anhand eines elastisch gelagerten starren Kreiszylinders untersucht.

Bei ansteigender REYNOLDS-Zahl kommt es vermehrt zu Bewegungen quer zur dominierenden Strömungsrichtung. Werden diese Querbewegungen unregelmäßig bzw. chaotisch, so geht die Strömung vom laminaren in den turbulenten Zustand über. Neben einer starken Durchmischung des Fluids wird eine Erhöhung der Wandschubspannungen und der Energiedissipation beobachtet. Turbulente Strömungen werden zwar von den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen vollständig beschrieben, sind aber nicht Gegenstand dieser Arbeit, da deren numerische Simulation sehr aufwändig ist.

2.3.2 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen basieren auf der lokalen Impulserhaltung (2.15) und der Kontinuitätsbedingung (2.41) in der Momentankonfiguration. Das gekoppelte partielle Differenzialgleichungssystem folgt zu

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \rho \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } Q, \quad (2.42a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q. \quad (2.42b)$$

Zur Lösung der gekoppelten partiellen Differenzialgleichungen ist wiederum die Formulierung von Anfangs- und Randbedingungen notwendig. Die DIRICHLET-Randbedingungen schreiben eingepägte Randgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{auf } P^v \quad (2.43)$$

vor. Die NEUMANN-Randbedingungen sind wie bei der Struktur Spannungsrandbedingungen

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } P^t. \quad (2.44)$$

Als Anfangsbedingung ist das Geschwindigkeitsfeld zum Ausgangszeitpunkt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.45)$$

vorzugeben. Infolge der Inkompressibilität muss zudem ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.46)$$

vorliegen.

2.3.3 Kennwerte von Strömungen

Zur Charakterisierung von Strömungen dienen dimensionslose Kennwerte, die aus Ähnlichkeitsbetrachtungen abgeleitet sind. Mit ihnen ist es möglich, dynamisch ähnliche Strömungen zu untersuchen, um z. B. aus Modellversuchen auf das reale Strömungsverhalten zu schließen. Gebildet werden die Kennwerte aus Parametern, die die betrachtete Aufgabenstellung charakterisieren. Die Kennwerte können auch auf Teilgebiete oder auf einzelne finite Elemente beschränkt sein.

Reynolds-Zahl

Die REYNOLDS-Zahl

$$\text{Re} = \frac{V \cdot L}{\nu} \quad (2.47)$$

ist einer der wichtigsten Kennwerte einer Strömung. Sie gibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften an. Im Gegensatz zu dem Materialkennwert der kinematischen Zähigkeit

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.48)$$

sind die charakteristischen Werte Geschwindigkeit V und Länge L Systemwerte, die von der betrachteten Aufgabenstellung abhängen.

Die REYNOLDS-Zahl gibt einen Hinweis auf die Fließform einer Strömung. Beispielsweise deutet eine REYNOLDS-Zahl, die kleiner als 2 300 ist, bei einer Rohrströmung auf eine laminare Fließform hin [83]. Hingegen ist bei größeren Werten eine turbulente Strömung zu erwarten. Mit Beschränkung auf laminare Strömungen werden in dieser Arbeit ausschließlich Strömungen mit kleinen REYNOLDS-Zahlen betrachtet.

Mach-Zahl

Ein Maß für die Kompressibilität einer Strömung liefert die MACH-Zahl

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} \quad (2.49)$$

mit dem Verhältnis zwischen der charakteristischen Geschwindigkeit V und der Schallgeschwindigkeit c . Diese Kennzahl gilt auch in der Elastodynamik.

Strouhal-Zahl

Bei umströmten Körpern folgt die Wirbelablösefrequenz $f = \frac{1}{T}$ aus der STROUHAL-Zahl

$$\text{St} = \frac{L}{V \cdot T} \quad (2.50)$$

Im Verhältnis der stationären zu den instationären Trägheitskräften geht hier die Periode T ein.

Froude-Zahl

Bei Strömungen mit freien Oberflächen, bei denen den Schwerkraften eine besondere Rolle zukommt, ist die FROUDE-Zahl

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}} \quad (2.51)$$

als Verhältnis der Trägheits- zu den Schwerkraften ein Maß zur Charakterisierung der Strömung.

Peclet-Zahl

Wird der Stofftransport in einer Strömung mit der Konvektions-Diffusions-Gleichung (3.1) betrachtet, so gibt die PECKET-Zahl

$$\text{Pe} = \frac{a L}{\kappa} \quad (2.52)$$

den Einfluss der Konvektion gegenüber der Diffusion mit der konvektiven Geschwindigkeit a und dem Diffusionskoeffizienten κ an. Für numerische Lösungsverfahren ist dieser Kennwert insbesondere dann interessant, wenn die Konvektion in einer Strömung dominiert. Die Verfahren neigen dann häufig dazu, unphysikalische Ergebnisse zu liefern.

2.4 Fluid-Struktur-Kopplung

Von Ingenieuren betrachtete Aufgabenstellungen stellen sich häufig als ein aus Einzelsystemen gekoppeltes Gesamtsystem dar. Beispielsweise bildet eine Brücke, die durch Wind angeregt wird, ein Gesamtsystem, in dem die Windströmung mit der Brückenbewegung gekoppelt ist. Bei praxisrelevanten Aufgaben sind jedoch häufig vereinfachende Annahmen zulässig, die das Gesamtsystem entkoppeln und verkleinern. So wird beispielsweise die Windlast im klassischen Hochbau unabhängig von den Deformationen des Gebäudes ermittelt. Dies ist zulässig, solange die Deformationen keinen maßgebenden Einfluss auf das Windfeld haben.

In dieser Arbeit wird aber davon ausgegangen, dass die Strukturdeformationen groß sind und Einfluss auf das gekoppelte Gesamtsystem haben. Zur Analyse des Systemverhaltens sind daher Berechnungsmodelle erforderlich, die den Einfluss der Wechselwirkung vollständig erfassen.

Die Berechnung des gekoppelten Systems wird in vielen Bereichen immer wichtiger. So müssen Brücken immer größere Spannweiten überbrücken, und leichte Konstruktionen wie Membrandächer werden häufiger entworfen; oft wird hierbei der Einfluss der Wechselwirkung mit der Windströmung maßgebend. Aber auch in anderen Bereichen wie z.B. der Medizintechnik bei von Blut durchströmten Herzen oder Arterien ist eine Untersuchung des gekoppelten Systems notwendig. Die dargestellten Systeme unterliegen meist einer starken, nichtlinearen Wechselwirkung, so dass bei der Diskretisierung eine starke Kopplung der Modellgleichungen zu berücksichtigen ist. Nicht zuletzt unterstützt die rasante Entwicklung im Computerbereich die Entwicklung neuer Modelle und Diskretisierungsverfahren.

2.4.1 Klassifizierung

Die getroffenen kontinuumsmechanischen Annahmen zur Beschreibung eines materiellen Körpers \mathcal{B} ermöglichen eine Klassifizierung der Kopplungsarten. Die Modellgleichungen beschreiben das physikalische Verhalten eines Körpers innerhalb seines materiellen Gebiets und auf seinem Rand. Dies führt zu zwei möglichen Kopplungsarten – der Rand- und der Gebietskopplung –, die wie folgt klassifiziert sind:

- Randkopplung

Die Wechselwirkung zwischen zwei Modellen findet über ihren gemeinsamen Rand – den Kopplungsrand bzw. das Interface – statt. Zwei Anwendungsbeispiele sind in Abbildung 2.6 skizziert. Während links

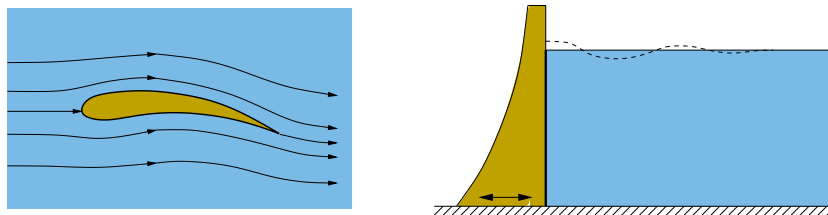


Abbildung 2.6: Randgekoppelte Systeme

ein Tragflügel von Luft umströmt wird, steht rechts eine erdbebenangeregte Staumauer in Wechselwirkung mit dem Stausee.

- Gebietskopplung

Die Wechselwirkung zwischen den Modellen findet in dem Teilgebiet statt, in dem sich die Gebiete der verschiedenen Modelle überschneiden. Abbildung 2.7 zeigt eine Anwendung, bei der ein als poröses Medi-

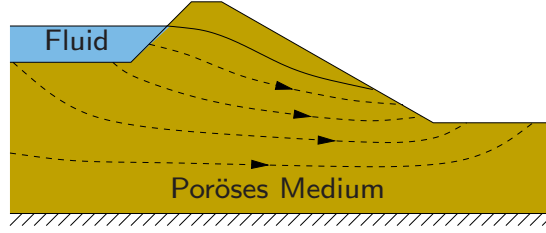


Abbildung 2.7: Gebietsgekoppeltes System

um betrachteter aufgeschütteter Damm von einem Fluid durchströmt wird.

2.4.2 Kopplungsmodell

Die in dieser Arbeit betrachteten Aufgabenstellungen mit umströmten Festkörpern stellen Systeme mit randgekoppelten Modellen dar. Am Kopplungsrand $P^C = P^F \cap P^S$ wirken die Fluidrandspannungen \mathbf{t}^F auf die Struktur, die sich infolge der Belastung deformiert und so die Geometrie des Fluidgebiets ändert. Mit der Strukturbewegung sind auch die Fluidgeschwindigkeiten auf dem Kopplungsrand festgelegt.

Im Einzelnen führt dies für die Struktur auf die NEUMANN-Randbedingung

$$\mathbf{t}_0^S = -\frac{d\Gamma_t^C}{d\Gamma_0^C} \mathbf{t}^F \quad \text{auf} \quad P_0^C, \quad (2.53)$$

bei der die in die Referenzkonfiguration transformierten Randspannungen des Fluids \mathbf{t}^F als Randlasten auf die Struktur wirken sowie auf die DIRICHLET-Randbedingung für das Fluid

$$\mathbf{v}^F = \mathbf{v}^S \quad \text{auf} \quad P^C, \quad (2.54)$$

bei der die Geschwindigkeiten der beiden Kontinua auf dem gemeinsamen Rand übereinstimmen müssen, mit der Folge, dass der Kopplungsrand mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}^C = \mathbf{v}^F = \mathbf{v}^S$ mitbewegt wird. Zur Simulation idealglatter Ränder gilt (2.54) mit einer Randnormalen \mathbf{n} nur normal zur Strukturoberfläche

$$\mathbf{v}^F \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf} \quad P^C. \quad (2.55)$$

Insgesamt wird mit den Bedingungen die Impulsbilanz, die Kontinuität der Geometrie und hieraus folgend auch die mechanische Energiebilanz über den Kopplungsrand hinweg exakt erfüllt und die Wechselwirkung vollständig erfasst.

3 Diskretisierung

Für die in Kapitel 2 beschriebenen Anfangs-Randwertaufgaben existieren nur für einfache räumliche Geometrien mit meist homogenen Randbedingungen analytische Lösungen. Zur Lösung komplexer Aufgabenstellungen sind numerische Berechnungsverfahren notwendig. Die Finite-Element-Methode angewendet in Raum und Zeit ist das in dieser Arbeit favorisierte Verfahren. Es wird im kommenden Abschnitt 3.1 an einer einfachen Modellgleichung erläutert. In den drei folgenden Abschnitten werden die beiden Kontinua – Struktur und Fluid – und deren Kopplung betrachtet. Im letzten Abschnitt 3.5 wird auf das Verfahren zur Lösung des aus der Diskretisierung entstandenen nichtlinearen Gleichungssystems eingegangen.

3.1 Raum-Zeit-Formulierung

Zur numerischen Lösung stationärer und instationärer Prozesse wurden in der Struktur- und Strömungsmechanik verschiedene Verfahren entwickelt; sie sind in Standardwerken [8, 12, 23, 33, 84] detailliert erläutert.

Das klassische Vorgehen zur Lösung instationärer Prozesse besteht in der Aufteilung der Diskretisierung in einen räumlichen und einen zeitlichen Teil. Als Folge der Aufteilung entstehen Schwierigkeiten bei der Formulierung und Lösung gekoppelter Prozesse, wie sie hier in Form von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen vorliegen. Einzelheiten hierzu finden sich weiter unten im Abschnitt 3.4. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, baut das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren auf einer einheitlichen Diskretisierung in Raum und Zeit auf, welche im Folgenden erläutert wird.

3.1.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Methode

Als Diskretisierungsverfahren der in Kapitel 2 betrachteten Modellgleichungen wird die Finite-Element-Methode in Raum und Zeit angewendet. Um

die Raum-Zeit-Formulierung zu erläutern, wird sie exemplarisch auf die vereinfachende räumlich eindimensionale, instationäre Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$\theta_{,t} + a \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = \bar{f} \quad \text{in } \Omega \times I \quad (3.1)$$

angewendet. Die Zustandsgröße θ , welche beispielsweise eine Temperatur darstellt, unterliegt neben einer zeitlichen Änderung einer Konvektion mit der vorgegebenen konvektiven Geschwindigkeit a und einer Diffusion mit dem Diffusionskoeffizienten κ . Die rechte Seite \bar{f} beinhaltet Quellen und Senken des betrachteten Gebiets.

Zur Lösung der Differenzialgleichung ist eine Anfangsbedingung $\theta(x, t_0) = \theta_0(x)$ und eine Randbedingung zu erfüllen, welche zur Herleitung vereinfachend als homogene DIRICHLET-Randbedingung $\bar{\theta} = 0$ auf dem gesamten Rand $\Gamma = \partial\Omega$ gewählt wird.

Zur Erläuterung des numerischen Lösungsverfahrens bietet sich die Konvektions-Diffusions-Gleichung an, da sie zum einen die Herleitungen durch das räumlich eindimensionale Gebiet Ω vereinfacht, zum anderen kann an den drei Termen der linken Seite das verwendete Verfahren vollständig erläutert werden. Der erste Term $\theta_{,t}$ dient zur Darstellung des zeitdiskontinuierlichen GALERKIN-Verfahrens in Abschnitt 3.1.2. Der zweite Term $a \nabla \theta$ bedarf der numerischen Stabilisierung aus Abschnitt 3.1.3. Der dritte Term $\kappa \Delta \theta$ dient zusammen mit den anderen zur Herleitung der schwachen Form und zur generellen Erläuterung des Diskretisierungsverfahrens.

Zur numerischen Lösung wird die Differenzialgleichung (3.1) in eine integrale Form überführt. Hierzu wird die Differenzialgleichung mit einer Testfunktion $\delta\theta$ multipliziert und über das räumliche Gebiet Ω und das zeitliche Gebiet I integriert. Die entstehende Gleichung

$$\int_I \int_{\Omega} \delta\theta (\theta_{,t} + a \nabla \theta - \kappa \Delta \theta) d\Omega dt = \int_I \int_{\Omega} \delta\theta \bar{f} d\Omega dt \quad \forall \delta\theta \in \mathcal{V} \quad (3.2)$$

wird als Variationsformulierung oder variationelle Form der Differenzialgleichung bezeichnet, wobei die Formulierung der Randbedingungen hier und im Folgenden nicht zusätzlich angegeben wird, wenn die Randbedingungen von den Ansätzen exakt erfüllt sind. Die Anfangsbedingungen werden durch das zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Verfahren (Abschnitt 3.1.2) berücksichtigt und ebenfalls nicht mit angegeben.

Die gewählte Schreibweise der variationellen Größe $\delta\theta$ liefert einen Hinweis auf den gewählten Testraum \mathcal{V} , der hier identisch ist mit dem Ansatzraum von θ . Im Weiteren wird nicht näher auf die Wahl der Ansatz- und

Testräume, im Allgemeinen HILBERT-Räume, eingegangen. Einen tieferen Einblick ermöglichen Werke zur Funktionalanalysis und Variationsrechnung, z. B. [42, 76]. Zudem wird darauf verzichtet, auf die Räume, z. B. „ $\forall \delta\theta \in \mathcal{V}$ “, der variationellen und schwachen Formen hinzuweisen.

Der klassische Ansatz zur Durchführung der Integrationen in (3.2) und zum Lösen der Gleichung besteht in einer semidiskreten Formulierung, bei der die Integrationen in Raum und Zeit getrennt und sequenziell durchgeführt werden. Nach Anwenden eines Diskretisierungsverfahrens im räumlichen Gebiet schließt sich ein Diskretisierungsverfahren in der Zeit an.

Die Trennung von Raum und Zeit und die daraus folgenden Schwierigkeiten, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit diskutiert sind, werden mit der gewählten Raum-Zeit-Formulierung elegant umgangen. Im Gegensatz zu einer semidiskreten Formulierung werden die beiden Integrationen über das Raum-Zeit-Gebiet $Q = \Omega \times I$ mit

$$\int_Q \delta\theta (\theta_{,t} + a \nabla\theta - \kappa \Delta\theta) dQ = \int_Q \delta\theta \bar{f} dQ \quad (3.3)$$

zusammengefasst, um einheitlich diskretisiert und integriert zu werden.

Durch partielle Integration entsteht die schwache Form der Differenzialgleichung

$$\int_Q \delta\theta (\theta_{,t} + a \nabla\theta) dQ + \int_Q \kappa \nabla\delta\theta \cdot \nabla\theta dQ = \int_Q \delta\theta \bar{f} dQ \quad (3.4)$$

Sie bildet den Ausgangspunkt der Diskretisierung und zeichnet sich durch eine verminderte Anforderung an die Differenzierbarkeit der Zustandsgröße θ aus. Im Gebiet Q muss sie nur noch einfach stetig differenzierbar sein. Dafür muss nun die Testfunktion $\delta\theta$ ebenfalls einfach stetig differenzierbar sein.

Zur Diskretisierung der schwachen Form ist eine Abbildung des Raum-Zeit-Gebiets auf ein Raum-Zeit-Netz notwendig. Das bei der Diskretisierung entstehende Gleichungssystem für das gesamte Raum-Zeit-Netz ist um ein Vielfaches größer als das für ein räumliches Netz. Zur Lösung realitätsnaher Aufgabenstellungen wird das Raum-Zeit-Netz orthogonal zur Zeitachse in n Zeitintervalle $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ unterteilt. Zusammen mit dem räumlichen Gebiet Ω , später auch mit dem zeitlich veränderlichen Gebiet $\Omega = \Omega(t)$, entsteht eine Sequenz von Raum-Zeit- bzw. Zeit-Scheiben mit den zugehörigen Raum-Zeit-Gebieten $Q_n = \Omega \times I_n$, siehe Abbildung 3.1. Die Zeit-Scheiben werden sequenziell berechnet und bilden so eine Analogie zu klassischen Zeitschrittverfahren mit der Zeitschrittweite $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Mit der Aufteilung

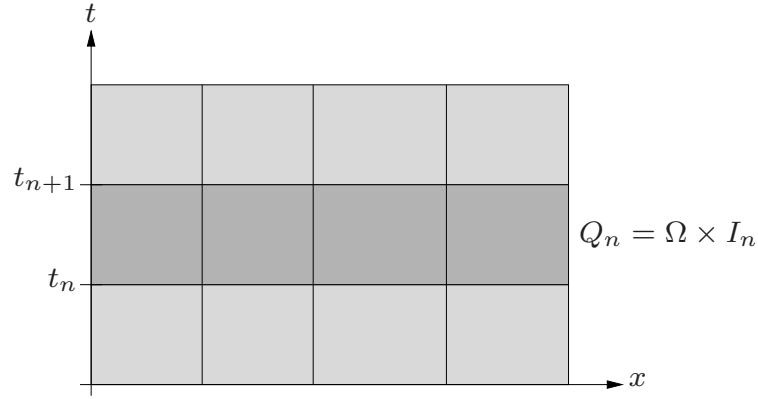


Abbildung 3.1: Raum-Zeit-Gebiet mit Raum-Zeit-Netz

folgt die schwache Form für die n -te Zeit-Scheibe zu

$$\int_{Q_n} \delta \theta (\theta_t + a \nabla \theta) dQ + \int_{Q_n} \kappa \nabla \delta \theta \cdot \nabla \theta dQ = \int_{Q_n} \delta \theta \bar{f} dQ . \quad (3.5)$$

Für die numerische Analyse ist ein Übergang von den bisher exakten Herleitungen¹, die zur schwachen Form (3.5) führen, auf eine Approximation notwendig. Die Grundidee der Finite-Element-Methode als Approximationsverfahren besteht in der Aufteilung des geschlossenen, räumlichen Gebiets $\bar{\Omega}$ in eine Anzahl zusammenhängender endlicher Teilgebiete

$$\bar{\Omega} \approx \bigcup_e \bar{\Omega}_e \quad (3.6)$$

und der Formulierung der Modellgleichungen und Annahme der Funktionsverläufe der Zustandsgrößen in ihnen und auf gemeinsamen Rändern. Die so eingeführten Teilgebiete werden als *finite Elemente* bezeichnet.

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode unterteilt die in (3.5) betrachteten Zeit-Scheiben ebenfalls räumlich, so dass das gesamte Raum-Zeit-Gebiet in endliche Teilgebiete

$$\bar{Q} \approx \bigcup_e \bar{Q}_e , \quad (3.7)$$

die *finiten Raum-Zeit-Elemente*, aufgeteilt wird. Sie unterscheiden sich somit gegenüber den rein räumlichen Elementen durch die zusätzliche Zeitachse, welche durch das Raum-Zeit-Gebiet eingeführt wird. Mit der zusätzlichen Achse entsteht für den räumlich eindimensionalen Fall ein zweidimensionales

¹Basierend auf der Annahme, dass die Anwendung der Variationsformulierung und der Übergang von der starken auf die schwache Form zulässig sind.

Element und für den später betrachteten räumlich zweidimensionalen Fall ein dreidimensionales Element. Die entstehenden Elemente sind für beide Fälle und einer linearen Approximation der Geometrie in Abbildung 3.2 mit ihren Raum-Zeit-Knoten dargestellt.

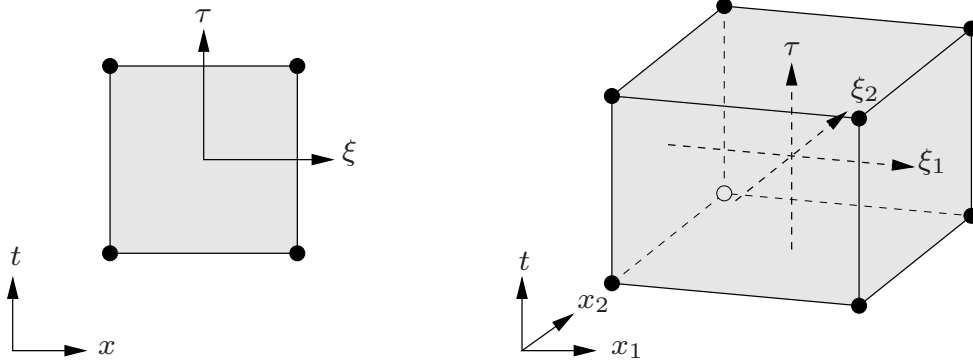


Abbildung 3.2: Räumlich ein- und zweidimensionales Raum-Zeit-Element

Wie in der klassischen Finite-Element-Methode wird für den Verlauf der Zustandsgrößen im Element ein Näherungsansatz

$$\theta(\xi, \tau) \approx \sum_i N_i(\xi, \tau) \hat{\theta}_i = \mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.8)$$

in Abhängigkeit der Freiwerte $\hat{\theta}_i$ am Knoten i gewählt. Die Ansatzfunktionen N_i werden mittels der LAGRANGE-Polynome

$$\lambda_i(\xi) = \prod_{j=0, j \neq i}^p \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.9)$$

für die gewählte Ansatzordnung p gebildet. Die Ansatzfunktionen des Raum-Zeit-Elements bilden alle Permutationen aus dem Produkt der LAGRANGE-Polynome der räumlichen ξ und der zeitlichen Koordinate τ im Parameterraum

$$N_i(\xi, \tau) = \lambda_j(\xi) \cdot \lambda_k(\tau) \quad (3.10)$$

Für den räumlich eindimensionalen Fall sind die vier Funktionen für den bilinearen Ansatz in Abbildung 3.3 dargestellt. Wird keine andere Aussage getroffen, finden in dieser Arbeit ausschließlich lineare² isoparametrische Elemente Verwendung, bei denen die Ansatzfunktionen auch als Testfunktionen und zur Approximation der Geometrie dienen.

²Auf die Vorsilben *bi* und *tri* im räumlich ein- und zweidimensionalen Fall wird im Weiteren verzichtet.

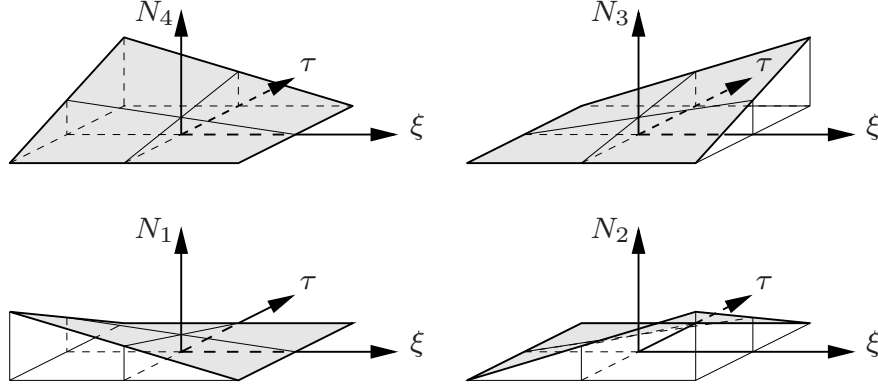


Abbildung 3.3: Ansatzfunktionen in Raum und Zeit

Das Einsetzen der Ansatzfunktionen (3.8) in die schwache Form (3.5) und Integration über die Zeit-Scheibe führen auf

$$\delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \bar{\mathbf{f}} \quad (3.11)$$

Da die Gleichung für alle Variationen von $\delta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ erfüllt sein soll, folgen die unbekannten Freiwerte zu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{f}} \quad (3.12)$$

3.1.2 Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren

Die C^0 -Stetigkeit der Ansatzfunktionen in zeitlicher Richtung wird an den Zeit-Scheibengrenzen mit der zeitdiskontinuierlichen GALERKIN-Formulierung aufgegeben. Das Einbringen der Stetigkeitsbedingung in die Variationsformulierung führt dazu, dass für jeden Term mit einer zeitlichen Ableitung ein Sprungterm

$$\int_{Q_n} \delta \theta \theta_{,t} dQ \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega} \delta \theta(t_n^+) \cdot (\theta(t_n^+) - \theta(t_n^-)) d\Omega \quad (3.13)$$

mit

$$\theta(t_n^\pm) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta(t_n \pm \varepsilon) \quad (3.14)$$

zu der schwachen Form hinzugefügt wird, welcher die Freiwerte am Ende der vorangegangenen Zeit-Scheibe mit denen am Anfang der betrachteten Zeit-Scheibe verbindet und so die Übergangsbedingungen erfüllt. Bei der sequenziellen Berechnung der Zeit-Scheiben ist die Zustandsgröße $\theta(t_n^-)$ am Ende der vorangegangenen Zeit-Scheibe bekannt, so dass der mit ihr gebildete Term in die rechte Seite des Gleichungssystems eingeht. Wie in Abbil-

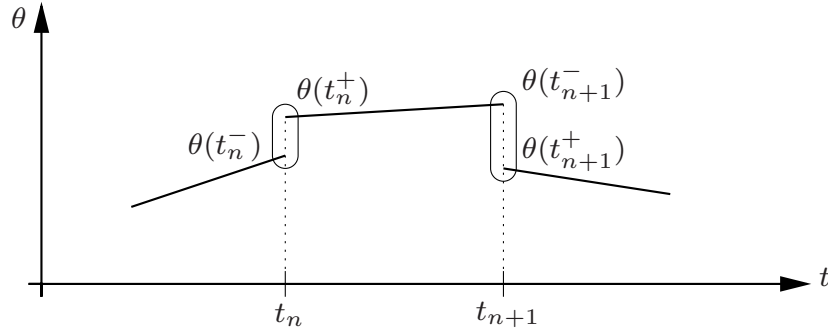


Abbildung 3.4: Zeitdiskontinuierlicher Temperaturverlauf

dung 3.4 dargestellt, können die Freiwerte mit diesem Verfahren Sprünge an den Grenzen der Zeit-Scheiben aufweisen.

Die gewählte Formulierung hat mehrere Vorteile:

- Es entsteht ein Verfahren von höherer Ordnung in der Zeit, siehe Abschnitt 3.2.1, da die Freiwerte zu Beginn einer Zeit-Scheibe nicht zu Anfangswerten degradieren.
- Es sind konstante Ansätze in der Zeit möglich, vgl. JOHNSON [41].
- Das Zeitintegrationsverfahren ist bei linearen Differenzialgleichungen A-stabil [34] und ermöglicht somit beliebig große Zeitschritte.
- Die Implementierung ist einfacher, da die Verknüpfung der Zeit-Scheiben allein auf Elementebene erfolgt.

ERIKSSON, ESTEP, HANSBO & JOHNSON führen in ihrem Buch [20] vergleichende Untersuchungen zur Stabilität und Fehlerordnung von linearen, kontinuierlichen und konstanten, diskontinuierlichen Ansätzen in der Zeit durch. Die Verfahren werden mit $ZKG(p)$ und $ZDG(p)$ für das zeitkontinuierliche und das zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Verfahren mit Polynomgrad p abgekürzt. Sie erhalten mit $ZDG(0)$ ein Verfahren erster Ordnung und mit $ZKG(1)$ eines zweiter Ordnung. Während die Genauigkeit beim $ZKG(1)$ bei geringer Konvektion größer ist als beim $ZDG(0)$, so fällt sie bei ansteigender Konvektion stark ab. In ihrem Resümee bevorzugen sie das $ZDG(0)$, da es für einen größeren Anwendungsbereich robuster ist. Das hier verwendete $ZDG(1)$ ist im Vergleich dazu von dritter Ordnung genau (Abschnitt 3.2.1) und für lineare Differenzialgleichungen A-stabil.

Ein Nachteil besteht in dem erhöhten numerischen Aufwand, da für jede Zustandsgröße ein zusätzlicher Freiwert am Anfang einer Zeit-Scheibe entsteht.

Bei den hier verwendeten linearen Ansätzen entspricht dies gerade einer Verdoppelung der Freiwertanzahl. In [67] wird von SHAKIB & HUGHES ein Verfahren zur Reduzierung des Gleichungssystems auf zwei schwach gekoppelte Systeme vorgestellt, welche mit einem Prädiktor-Multi-Korrektor-Verfahren gelöst werden.

3.1.3 Stabilisierung

Numerisches Phänomen

Die numerische Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung bereitet für größere PECLET-Zahlen Schwierigkeiten. Die Gleichung wird dabei von der Konvektion dominiert, und die Lösung weist im Bereich großer Gradienten unphysikalische Oszillationen auf. Mit fortschreitender Zeit werden die Oszillationen infolge der Konvektion durch das Gebiet transportiert. Ein solch instabiles Verfahren kann die numerische Lösung unbrauchbar machen.

Der Grund für das unbefriedigende Verhalten liegt in den gewählten Ansatz- und Testfunktionen. Sie stellen mit ihrer im Parameterraum symmetrischen Form zwar eine gute Näherung für elliptische Differenzialgleichungen und damit diffusionsdominante Strömungen dar, jedoch wird für hyperbolische Differenzialgleichungen und damit für Strömungen mit starker Konvektion die Richtungsabhängigkeit der Lösung nicht hinreichend gut berücksichtigt. Unphysikalische Lösungen können durch Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung, so dass die Element-PECLET-Zahl

$$\text{Pe}_e = \frac{a h}{2\kappa} \lesssim 1 \quad (3.15)$$

wird, oder durch Stabilisierungsverfahren verhindert werden.

Galerkin / Least-Squares-Verfahren

Zur Vermeidung der Oszillationen ist eine Vielzahl von Verfahren entwickelt worden. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Darstellung des verwendeten GALERKIN / Least-Squares-Verfahrens und einen Vergleich mit einem klassischen Upwind-Verfahren.

Zur Herleitung genügt eine Betrachtung des stationären Falles

$$\mathcal{L}(\theta) = a \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = \bar{f} \quad \text{in } \Omega . \quad (3.16)$$

Der zugehörigen schwachen Form

$$\int_{\Omega} a \delta\theta \nabla\theta \, d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \nabla\delta\theta \cdot \nabla\theta \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\theta \bar{f} \, d\Omega \quad \forall \delta\theta \quad (3.17)$$

wird ein Minimum-Fehlerquadrat-Term der starken Form auf Elementebene

$$+ \sum_e \int_{\Omega_e} \tau \cdot \mathfrak{L}(\delta\theta) (\mathfrak{L}(\theta) - \bar{f}) \, d\Omega \quad (3.18)$$

als Stabilisierungsterm im Sinne eines Least-Squares-Verfahrens mit dem Stabilisierungsparameter τ hinzugefügt. Die Integration des Stabilisierungsterms ist nur über dem Elementgebiet definiert, da die Ansatzfunktionen an den Elementgrenzen nur C^0 -stetig sind. Die Stabilisierung der Bilanzgleichungen über die Elementränder hinweg erfordert weitere Terme, jedoch ist diese Stabilisierung normalerweise nicht notwendig, vgl. HUGHES & HULBERT [34], oder hat sogar einen negativen Einfluss, siehe Abschnitt 3.4.3.

Bei der Diskretisierung mit linearen Ansatzfunktionen verschwinden aus (3.18) alle Terme, die einen LAPLACE-Operator enthalten, so dass

$$+ \sum_e \int_{\Omega_e} \tau \cdot a \nabla\delta\theta (a \nabla\theta - \bar{f}) \, d\Omega \quad (3.19)$$

als Stabilisierungsterm der schwachen Form hinzugefügt wird.

Stabilisierungsparameter τ

Die Wahl des Stabilisierungsparameters τ bereitet einige Schwierigkeiten. Bei der numerischen Lösung werden mit

$$\tau = \frac{h}{2 \cdot a} \cdot \left(\coth(\text{Pe}_e) - \frac{1}{\text{Pe}_e} \right) \quad (3.20)$$

die Knotenwerte für den räumlich eindimensionalen Fall und $\text{Pe}_e \geq 1$ numerisch exakt berechnet [15]. Im mehrdimensionalen Fall ist τ im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmbar. In der Literatur werden zur Wahl von τ zahlreiche Vorschläge gemacht. Einen Überblick gibt z. B. PAPASTAVROU in [60]. Jedoch ist es nicht Gegenstand dieser Arbeit, Stabilisierungsparameter für spezielle Aufgabenstellungen zu entwickeln; vielmehr ist es das Ziel, die Motivation und Interpretation der verwendeten Parameter aufzuzeigen.

Zugang zur Wahl des Parameters schafft eine Analyse des Stabilisierungsterms. Seine Einheit sollte identisch mit der Einheit der schwachen Form

sein. Zudem sollte die Ordnung der eingehenden Größen in Grenzsituationen mit derjenigen der diskreten, schwachen Form übereinstimmen. Somit kann die Ordnung von τ für konvektionsdominante Strömungen zu

$$\tau \sim O\left(\frac{h}{a}\right) \quad \text{für } \text{Pe}_e \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

und für diffusionsdominante Strömungen zu

$$\tau \sim O\left(\frac{h^2}{\kappa}\right) \quad \text{für } \text{Pe}_e \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

abgeschätzt werden. Da diffusionsdominante Strömungen bei der Berechnung mit der Finite-Element-Methode keine Schwierigkeiten bereiten, wird die zweite Abschätzung eigentlich nicht benötigt. Sie ist aber über die Péclet-Zahl im Stabilisierungsparameter enthalten, um diesen für den Fall $\text{Pe}_e \rightarrow 0$ gegen null streben zu lassen.

Für die Raum-Zeit-Formulierung wird von SHAKIB & HUGHES [67]

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2a}{h}\right)^2 + \left(\frac{12\kappa}{h^2}\right)^2}} \quad (3.23)$$

als Stabilisierungsparameter vorgeschlagen, wobei zusätzlich die Zeitschrittweite zur Stabilisierung der instationären Gleichungen berücksichtigt ist. Bei der Lösung der instationären Konvektions-Diffusions-Gleichung für stationäre Strömungen ist es von Vorteil, den ersten Term $(2/\Delta t)^2$ in der Wurzel von τ zu vernachlässigen. Dies ist konsistent mit dem Grenzfall $\Delta t \rightarrow \infty$ im stationären Fall, in dem der Term gegen null strebt.

Ausklammern von $h/(2a)$ aus der Wurzel des Stabilisierungsparameters in (3.23) führt auf

$$\tau = \frac{h}{2a} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\text{CFL}^2} + 1 + \frac{9}{\text{Pe}_e^2}}} \quad (3.24)$$

mit der COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Zahl

$$\text{CFL} = \frac{a \Delta t}{h} \quad , \quad (3.25)$$

welche die zurückgelegte Strecke eines materiellen Punktes mit der charakteristischen Elementlänge vergleicht. Mit dem so gedeuteten Stabilisierungsparameter ist zu erkennen, dass er nicht nur bei $\text{Pe}_e \rightarrow 0$ gegen null strebt, sondern auch bei $\text{CFL} \rightarrow 0$. Eine Verkleinerung der Zeitschrittweite verringert also den Einfluss der Stabilisierung, so dass verstärkt Oszillationen, gerade bei stationären Lösungen, auftreten können.

Deutung und Vergleich

Wie mit der Namensgebung angedeutet, wird das Stabilisierungsverfahren aus dem Least-Squares-Verfahren motiviert, welches ein eigenständiges numerisches Lösungsverfahren darstellt, vgl. JIANG [39]. Zur numerischen Lösung wird das Minimum des Integrals über das Quadrat der starken Form (3.16) gesucht

$$\int_{\Omega} (\mathfrak{L}(\theta) - \bar{f})^2 d\Omega \rightarrow \min. \quad (3.26)$$

Durch Variation der Minimalaufgabe folgt die zu diskretisierende Gleichung zu

$$\int_{\Omega} \mathfrak{L}(\delta\theta) (\mathfrak{L}(\theta) - \bar{f}) d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

Die Ähnlichkeit zu dem verwendeten Stabilisierungsterm (3.18) ist zu erkennen. Der Stabilisierungsterm verschwindet bei analytisch exakter Lösung durch das zu null werdende Residuum $\mathfrak{R}(\theta) = \mathfrak{L}(\theta) - \bar{f}$ im Klammerterm. Somit bleibt die Konsistenz des Verfahrens gewährleistet.

Da alle Terme mit einem LAPLACE-Operator bei der Diskretisierung aus der Stabilisierung entfallen, kann eine Parallele zum Streamline-Upwind / PETROV-GALERKIN-Verfahren (SUPG-Verfahren) gezogen werden. Diese Form der Stabilisierung geht auf BROOKS & HUGHES [15] zurück. Sie zeichnet sich durch eine Änderung der Testfunktion $\delta\theta$ aus. Der „normalen“ Testfunktion wird abhängig von der Konvektion der Gradient der Testfunktion hinzuaddiert

$$\delta\tilde{\theta} = \delta\theta + \tau \cdot a \nabla \delta\theta \quad (3.28)$$

Eine anschauliche Deutung lässt Abbildung 3.5 zu. Der hinzugefügte Gradi-

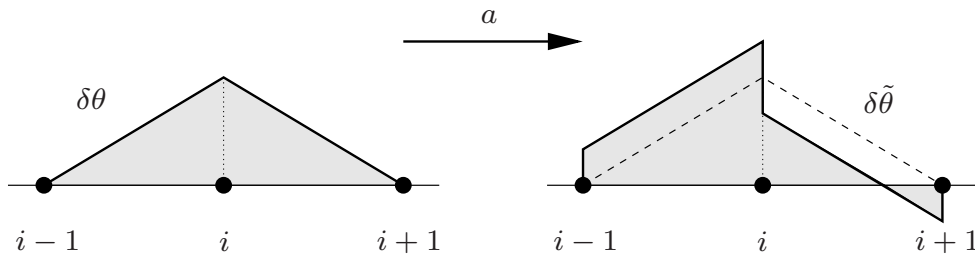


Abbildung 3.5: Veränderte Testfunktion des SUPG-Verfahrens

ent, der bei linearen Ansatzfunktionen einer konstanten Funktion entspricht, verursacht eine stärkere Wichtung in dem stromaufwärts liegenden Gebiet. Daher auch die Bezeichnung *upwinding*. Interessanterweise ist durch wenige

Umformungen ableitbar, dass das SUPG-Verfahren für die hier betrachtete Konvektions-Diffusions-Gleichung mit den verwendeten linearen Ansatzfunktionen identisch ist zur GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierung. Die Identität ist nicht verallgemeinerbar auf andere Modellgleichungen und Formulierungen. Das SUPG-Verfahren liefert aber häufig brauchbare Hinweise zur Definition des Stabilisierungsparameters τ .

Anwendungsbeispiel

Veranschaulichen lässt sich die Wirkungsweise der Stabilisierung an einem einfachen Beispiel [77]. Untersucht wird das räumliche Gebiet $\bar{\Omega} = [0, 1]$ mit eingepprägten, zeitinvarianten DIRICHLET-Randbedingungen $\theta(0) = 1$ und $\theta(1) = 0$. Weiter soll das Gebiet keine Quelle $\bar{f} = 0$ aufweisen. Die Konvektion wird zu eins und die Diffusion abhängig von der PECLET-Zahl gewählt. Für den stationären Fall mit konstanten Koeffizienten a und κ existiert mit

$$\theta(x) = 1 - \frac{1 - e^{a/\kappa \cdot x}}{1 - e^{a/\kappa}} \quad (3.29)$$

eine analytische Lösung der Aufgabe.

Zur numerischen Lösung werden zehn Elemente mit einer Länge von $h_e = 0.1$ verwendet. Die Ergebnisse für den stationären Fall sind in Abbildung 3.6 für

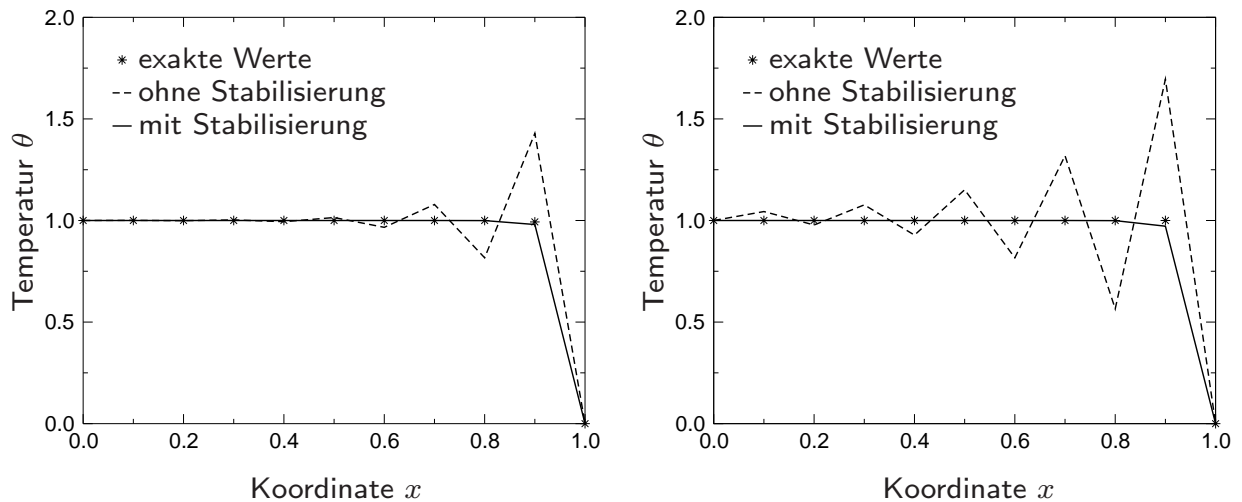


Abbildung 3.6: Stationäre Lösung für $Pe = 50$ (links) und $Pe = 100$ (rechts)

zwei PECLET-Zahlen, $Pe = 50$ und $Pe = 100$, gegenübergestellt. Es ist deutlich die Abhängigkeit der ohne Stabilisierung auftretenden Oszillationen von der PECLET-Zahl zu beobachten. Weiter ist zu erkennen, dass die Stabili-

sierung mit dem Stabilisierungsparameter nach (3.23) einen leicht diffusiven Einfluss auf die Lösung im Vergleich zur analytischen Lösung hat.

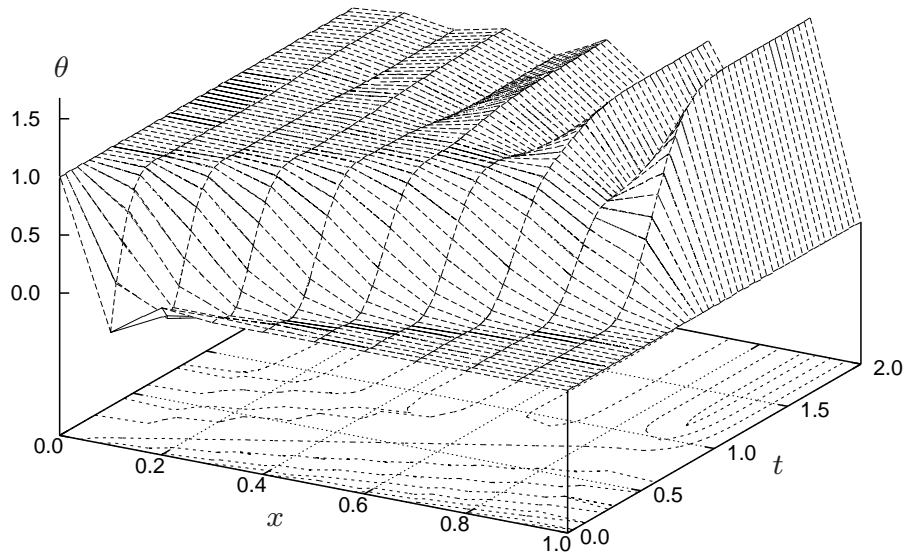


Abbildung 3.7: Zeitliche Evolution der Oszillation

Abbildung 3.7 zeigt die zeitliche Evolution der Oszillation bei Vernachlässigung der Stabilisierung bei einer PECLET-Zahl von $Pe = 100$. Ausgehend von der Anfangsbedingung $\theta(x, t_0) = 0$ ist der instationäre Verlauf von θ mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.04$ berechnet. Deutlich ist die Ausbildung der Oszillation und die Fortpflanzung in das Gebiet hinein zu erkennen. Die Störung zu Beginn der Berechnung bei $x = 0.1$ wird durch die eingeprägte Randbedingung $\theta(0) = 1$ hervorgerufen und klingt schnell ab. Kommt die von links nach rechts wandernde Front in den Einflussbereich der eingepprägten Randbedingungen bei $x = 1$, so entstehen Oszillationen im Frontbereich, die sich im weiteren zeitlichen Verlauf weiter nach links in das Gebiet hinein ausbreiten.

Die stationären Lösungen der stabilisierten instationären Gleichung sind für verschiedene CFL-Zahlen in Abbildung 3.8 bei $Pe = 50$ einander gegenübergestellt. Die Lösungen stimmen nicht mit der Lösung überein, welche die stationäre Gleichung mit Stabilisierung in Abbildung 3.6 (links) liefert. Die unterschiedlichen Lösungen für die drei CFL-Zahlen entstehen durch den zeitabhängigen Term im Stabilisierungsparameter (3.23). Je kleiner die CFL-Zahl ist, desto kleiner wird τ und damit der Einfluss der Stabilisierung, so dass bei kleiner werdenden Zeitschrittweiten die Oszillationen zunehmen. Somit kann es sehr ungünstig sein, eine stationäre Lösung mit der instationären Gleichung zu berechnen. Paradoxaerweise muss man demnach vor einer Berechnung wissen, ob die Lösung stationär oder instationär ist, um

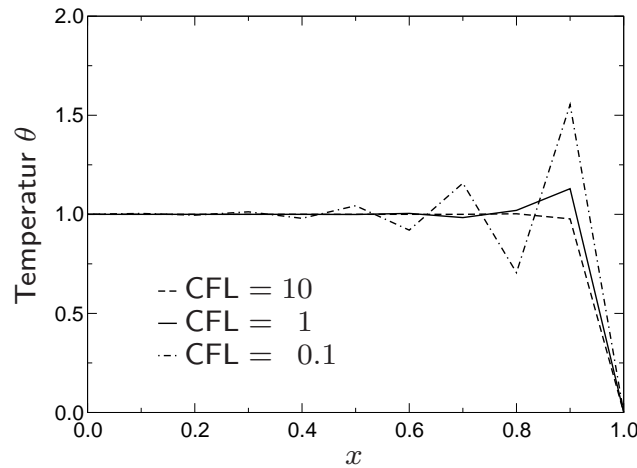


Abbildung 3.8: Abhängigkeit der stationären Lösung von der CFL-Zahl

den Stabilisierungsparameter richtig zu wählen. Die Abhängigkeit des Stabilisierungsparameters von der Aufgabenstellung ist – wie bereits erwähnt – der Grund, warum möglichst breit anwendbare Parameter angegeben werden und nicht auf einzelne Systeme optimierte Parameter.

3.2 Strukturdynamik

Die Strukturmodelle aus Abschnitt 2.2 werden in diesem Abschnitt mit der erläuterten Raum-Zeit-Formulierung einer numerischen Berechnung zugänglich gemacht. Das Starrkörpermodell dient zusammen mit dem Feder-Dämpfermodell im kommenden Abschnitt zur Bildung eines Ein-Masse-Schwinger-Systems, mit dem die Genauigkeit des Zeitintegrationsverfahrens untersucht wird. In den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 erfolgt die Umsetzung der beiden elastischen Festkörpermodelle, aufbauend auf der 2-Feld-Formulierung und der gemischten Formulierung. Die in Abschnitt 4.2 betrachtete wirbelerregte elastische Platte wird zur Verifizierung der beiden Modelle in Abschnitt 3.2.3 verwendet.

3.2.1 Starrkörper- und Feder-Dämpferelement

Die Beschreibung elastisch gelagerter Starrkörper erfolgt in Abschnitt 2.2.1 mit zwei Modellen – dem Starrkörper- und dem Feder-Dämpfermodell. Die Aufteilung ist sinnvoll, da die numerische Umsetzung in ein Starrkörper- und ein Feder-Dämpferelement unabhängig voneinander durchgeführt werden kann.

Starrkörperelement

Die instationäre, translatorische Bewegung eines Massepunktes wird auf Grundlage der Modellgleichung (2.21) mit

$$\int_{I_n} \delta \mathbf{v} m \dot{\mathbf{v}} dt - \int_{I_n} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{f}} dt + \delta \mathbf{v}(t_n^+) m (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} \quad (3.30)$$

beschrieben. Da der betrachtete materielle Körper starr ist, ist lediglich eine zeitliche Integration der Bewegungsgleichung notwendig. Der letzte Term der Gleichung entsteht durch den zeitdiskontinuierlichen GALERKIN-Ansatz, wie er bei der Konvektions-Diffusions-Gleichung in Abschnitt 3.1.2 eingeführt wird. Zur Beschreibung von Rotationsbewegungen ist analog eine weitere Variationsformulierung mit (2.22) aufzustellen.

Auf dem Rand des Starrkörpers werden weitere Knoten mit Geschwindigkeitsfreiwerten eingeführt. Sie dienen zur Fluid-Struktur-Kopplung. Die zusätzlichen Zustandsgrößen sind linear abhängig von dem Geschwindigkeitsvektor des Referenzknotens $\tilde{\mathbf{v}}^r$. Für den i -ten Knoten folgen die Geschwindigkeiten mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}^i zu

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{T}^i \cdot \tilde{\mathbf{v}}^r = \mathbf{T}^i \cdot \begin{bmatrix} v_x^r \\ v_y^r \\ \omega \end{bmatrix} . \quad (3.31)$$

Die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tilde{y}^i \\ 0 & 1 & \tilde{x}^i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

beinhaltet die Kinematik mit den lokalen Koordinaten \tilde{x}^i und \tilde{y}^i des i -ten Knotens, siehe Abbildung 3.9.

Die Transformationsbeziehung (3.31) gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt t in der Momentankonfiguration. Die benötigten räumlichen Koordinaten folgen aus der zeitlichen Integration der Geschwindigkeiten.

Feder-Dämpferelement

Das Federmodell aus dem Abschnitt 2.2.1 beinhaltet nur bei der Federkraft einen Term mit einer zeitlichen Ableitung, so dass nur für diese die C^0 -Stetigkeitsanforderung an den Zeit-Scheibengrenzen zu beachten ist. Um die Stetigkeitsanforderung der Federkraft über die Zeit-Scheibengrenzen hinweg

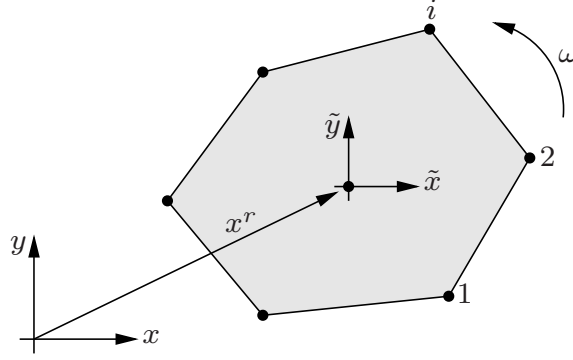


Abbildung 3.9: Starrkörper

in die Formulierung einzubringen, wird wiederum das zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Verfahren verwendet.

Insgesamt folgt die Variationsformulierung zu

$$\int_{I_n} \delta v (f + d \cdot v - \bar{f}) dt + \int_{I_n} \delta f \left(\frac{1}{k} \dot{f} - v \right) dt \quad (3.33a)$$

$$+ \delta f(t_n^+) \left(\frac{1}{k} f(t_n^+) - u(t_n^-) \right) = 0 \quad \forall \delta v, \delta f . \quad (3.33b)$$

Im zeitdiskontinuierlichen Term ist die Verschiebung am Ende der letzten Zeit-Scheibe anstelle der Federkraft eingesetzt worden. Damit muss die Federkraft nicht lokal im Element abgespeichert werden. Zudem wird eine zeitliche Veränderung der Federsteifigkeit an den Zeit-Scheibengrenzen trotz der Vernachlässigung in der Ratenformulierung hierdurch wieder berücksichtigt. Die Diskretisierung mit linearen Ansätzen in der Zeit führt nach Integration über das Zeitintervall auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} . \quad (3.34)$$

Die Matrix \mathbf{D} repräsentiert die Dämpfung, sie entfällt bei dämpfungsfreien Systemen. Da die Federkraft f nur innerhalb des Elements definiert ist, können die diskreten Federkräfte $\hat{\mathbf{f}}$ lokal abgelöst werden. Der Beitrag des Federelements zum globalen Gleichungssystem ist demnach wie folgt

$$(\mathbf{D} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{l}} . \quad (3.35)$$

Die Diskretisierung der Rotationsfeder verläuft analog zu der Diskretisierung der Verschiebungsfeder, wie bei den Modellgleichungen sind die beschreibenden Größen durch rotatorische Größen zu ersetzen.

Zeitlicher Diskretisierungsfehler

Die beiden Elemente, Starrkörper- und Feder-Dämpferelement, ermöglichen eine Analyse der Genauigkeitsordnung in der Zeit an einfachen Systemen.

Als erstes Beispiel wird ein Ein-Masse-Schwinger, wie in Abbildung 3.10 skizziert, betrachtet. Die Systemwerte sind wie folgt: Federsteifigkeit $k = \frac{\pi}{2}$, Dämpfung $d = 0$, Masse $m = 1$, Last $\bar{f} = 1$. Die Punktmasse wird mit einem Starrkörperelement diskretisiert. Als analytische Lösung hat das System eine Eigenkreisfrequenz von $\omega_0 = \frac{2}{5}\pi$ und eine Periode von $T = 5$.

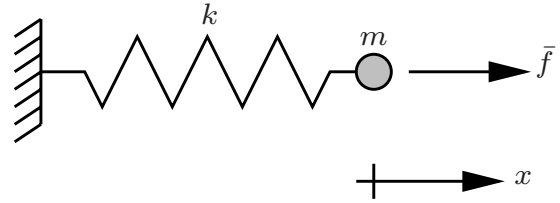


Abbildung 3.10: Ein-Masse-Schwinger

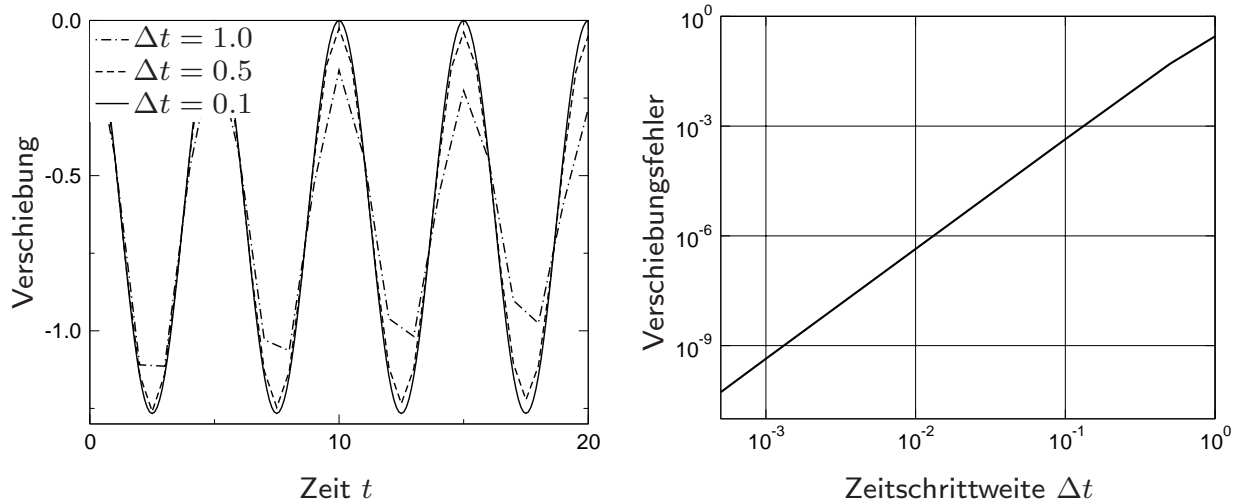


Abbildung 3.11: Ein-Masse-Schwinger: Verschiebung und Verschiebungsfehler

Der Verschiebungsverlauf ist in Abhängigkeit der Zeitschrittweite Δt in Abbildung 3.11 (links) dargestellt. Während der Phasenfehler gering ist, tritt der Amplitudenfehler bzw. Verschiebungsfehler deutlich hervor. Bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 1$ ist die numerische Dämpfung so groß, dass der berechnete Zeitverlauf das physikalische Verhalten nur unbefriedigend wiedergibt. Der Verschiebungsfehler zum Zeitpunkt $t = 20$ ist in Abhängigkeit der Zeitschrittweite in Abbildung 3.11 (rechts) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Verschiebungsfehler mit der Ordnung $O(\Delta t^3)$ für den Ein-Masse-Schwinger abnimmt und dass mindestens 10 Zeitschritte pro Schwingungsperiode zur Berechnung befriedigender Ergebnisse notwendig sind.

Rotiert ein Starrkörper, wie in Abbildung 3.12 dargestellt, mit einer eingprägten Rotationsgeschwindigkeit, so sinkt die Ordnung des Verfahrens auf $O(\Delta t^2)$, siehe Abbildung 3.13. Der Grund für die geringere Ordnung liegt in der Berechnung der räumlichen Koordinaten aus den zeitlich integrierten Knotengeschwindigkeiten. Der somit linear angenommene Verschiebungsverlauf kann einen Kreisbogen, auf dem sich der Knoten um den Schwerpunkt bewegt, nicht exakt wiedergeben. Da die Transformationsmatrizen (3.32) aus der aktuellen räumlichen Lage bestimmt werden, ist die von ihnen beschriebene Kinematik geometrisch nichtlinear. Die Nichtlinearität wird aber mit drei Schritten innerhalb der PICARD-Iteration, vgl. Abschnitt 3.5, hinreichend genau erfasst. Der Starrkörper ändert seine Ausdehnung infolge der Rotation und wird in diesem Fall kleiner. Die Berechnung der Verschiebung infolge einer eingprägten translatorischen Geschwindigkeit ist hingegen numerisch exakt.

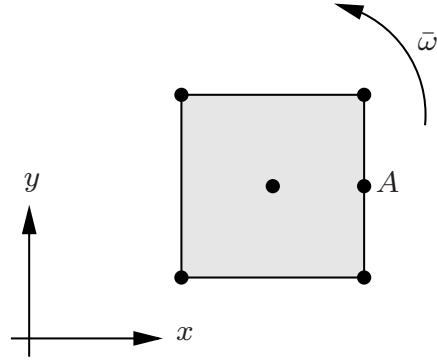


Abbildung 3.12: Rotierender Starrkörper

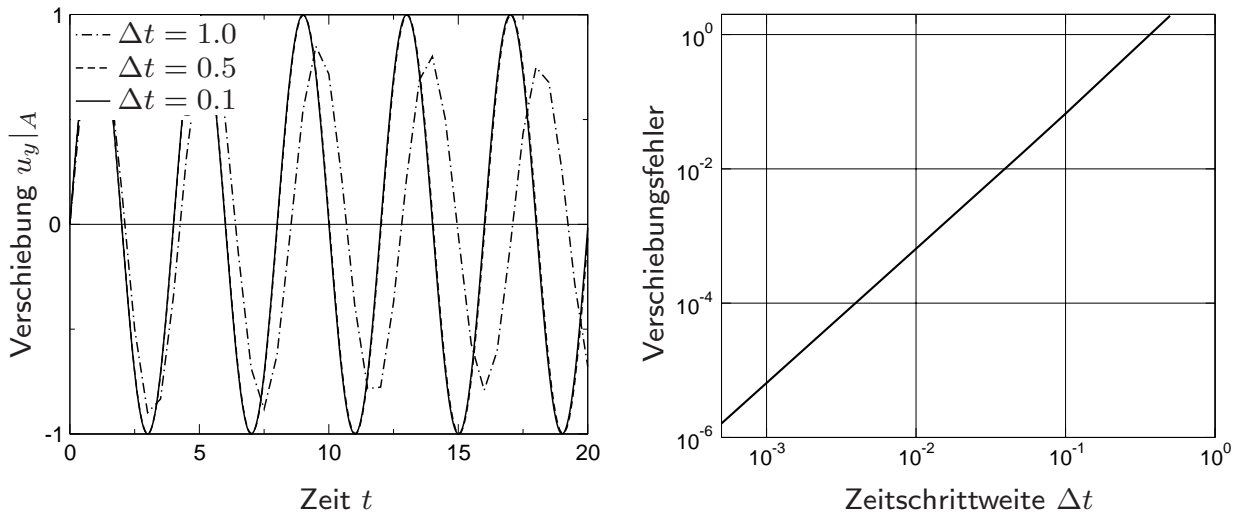


Abbildung 3.13: Verschiebung und Verschiebungsfehler

3.2.2 2-Feld-Formulierung

Wie bereits bei der Modellbildung in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, wird diese 2-Feld-Formulierung verwendet, weil sie direkt auf der klassischen Model-

lierung einer elastischen Scheibe als Weggrößenelement aufbaut. Mit dieser Formulierung können relativ einfach Elemente mit Ansätzen höherer Ordnung entwickelt werden, die zudem im Raum nicht stabilitätsgefährdet sind. Jedoch ist die Konvergenz der Lösung bei auf Biegung belasteten dünnen Strukturen meist nicht ausreichend.

Galerkin-Formulierung

Die Diskretisierung der Modellgleichungen aus Abschnitt 2.2.2 verläuft analog zum bisherigen Vorgehen. Nach Multiplikation mit den Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$, Integration über das Raum-Zeit-Gebiet und partieller Integration folgt die schwache Form zu

$$\int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dQ_0 + \int_{Q_{0,n}} \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\delta \mathbf{v}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\mathbf{u}) dQ_0 \quad (3.36a)$$

$$- \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dQ_0 - \int_{P_{0,n}^t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 dP_0 \quad (3.36b)$$

$$- \int_{Q_{0,n}} \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\delta \mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dQ_0 = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{u} . \quad (3.36c)$$

Der letzte Term der schwachen Form erfüllt die Kopplungsbedingung (2.28b) zwischen dem Verschiebungs- und dem Geschwindigkeitsfeld. Er ist so gewählt, dass er einheitenkonform mit den anderen Termen der schwachen Form ist – also einen Arbeitsausdruck bildet. Die Wahl der Formulierung der Kopplungsbedingung ist nicht eindeutig. Eine andere Möglichkeit ist z. B.

$$- \int_{Q_{0,n}} \delta \dot{\mathbf{v}} \rho_0 (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dQ_0 . \quad (3.37)$$

Bei numerischen Untersuchungen sind jedoch keine wesentlichen Unterschiede bei den Lösungen festzustellen. Ein negativer Effekt wird durch die Diskretisierung der Kopplungsbedingung (2.28b) mit gleichen Ansatzfunktionen für die beiden Felder \mathbf{u} und \mathbf{v} eingebracht. Durch die zeitliche Ableitung der Verschiebungen $\dot{\mathbf{u}}$ ist der Funktionsverlauf nur noch konstant in der Zeit, so dass im Allgemeinen die Gleichheit mit dem linearen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} nicht exakt erfüllt wird. Damit entkoppeln Geschwindigkeiten und Verschiebungen bei ungelagerten Systemen, die mit dieser Formulierung nicht ohne zusätzliche Bedingungen berechnet werden können [26]. Gelagerte Systeme sind nicht betroffen.

Die 2-Feld-Formulierung beinhaltet zeitliche Ableitungen des Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeldes. Für die zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Formulierung sind für beide Felder Sprungterme der schwachen Form hinzuzufügen. Im Einzelnen sind dies für die Verschiebungen

$$+ \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\delta \mathbf{u} (t_n^+)) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\mathbf{u} (t_n^+) - \mathbf{u} (t_n^-)) d\Omega_0 \quad (3.38)$$

und für die Geschwindigkeiten

$$+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v} (t_n^+) \rho_0 (\mathbf{v} (t_n^+) - \mathbf{v} (t_n^-)) d\Omega_0 \quad (3.39)$$

Stabilisierung

Zur Berechnung von Aufgabenstellungen der Strukturdynamik ist eine Stabilisierung der schwachen Form beim Auftreten von Wellen oder Wellenfronten in der Struktur notwendig, ansonsten sind die numerischen Lösungen auch ohne Stabilisierung stabil. Zur Abminderung von Oszillationen an Wellenfronten werden bei der 2-Feld-Formulierung GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierungsterme der Impulsbilanz

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \tau_M \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L} (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) (\mathcal{L} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0) dQ_0 \quad (3.40)$$

mit dem Residuum der starken Form ohne Volumenkräfte

$$\mathcal{L} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}_0 \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{u}) \quad (3.41)$$

und der Kopplungsbedingung

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \tau_C \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\delta \dot{\mathbf{u}} - \delta \mathbf{v}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) dQ_0 \quad (3.42)$$

der schwachen Form hinzugefügt.

Der Divergenzoperatorterm im Least-Squares-Term der Impulsbilanz beinhaltet zweifache Ableitungen der Ansatzfunktionen. Sie folgen mit den hier verwendeten Polynomen hauptsächlich zu null, so dass die Terme mit Divergenzoperator unberücksichtigt bleiben.

Ein Einheitenvergleich der Stabilisierungsterme mit der schwachen Form fordert für beide Stabilisierungsparameter die Einheit einer Zeit, womit eine Proportionalität zur Zeitschrittweite

$$\tau \sim O (\Delta t) \quad (3.43)$$

abgeleitet wird. Die Differenzialgleichung der Kopplungsbedingung (2.28b) beinhaltet keine Materialparameter, so dass, wie bei der Konvektions-Diffusions-Gleichung in (3.23), die halbe Zeitschrittweite als Stabilisierungsparameter der Kopplungsbedingung

$$\tau_C = \frac{\Delta t}{2} \quad (3.44)$$

dient.

Demgegenüber ist die Impulsbilanz zusätzlich abhängig vom verwendeten Material. In einer elastischen Struktur bewegt sich eine Welle mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c . Eine Wellenfront benötigt zum Durchlaufen eines Elements die Zeit $t_c = \frac{h}{c}$. Wird die Zeitschrittweite Δt kleiner als t_c , so stellen sich Oszillationen an der Wellenfront ein. Folglich werden beide Zeiten Δt und t_c zur Bestimmung des Stabilisierungsparameters

$$\tau_M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2c}{h}\right)^2}} \quad (3.45)$$

herangezogen.

Ist das Verhältnis der Kantenlängen der einzelnen Elemente sehr groß oder bewegt sich die zu stabilisierende Wellenfront entlang einer ausgezeichneten Richtung, zu der die Elemente ausgerichtet sind, so kann es sinnvoll sein, die charakteristische Elementlänge h in zwei Längen Δx und Δy aufzulösen und verschiedene Stabilisierungsparameter für die jeweilige Richtung zu wählen.

3.2.3 Gemischte Formulierung

Die Modellgleichungen der gemischten Formulierung, vgl. Abschnitt 2.2.3, bieten sich zur Kopplung mit den NAVIER-STOKES-Gleichungen insbesondere deswegen an, weil im globalen Gleichungssystem ausschließlich Geschwindigkeiten als Freiwerte auftreten. Zudem eignen sie sich besser zur Berechnung auf Biegung belasteter dünner Strukturen. Die Modellgleichungen und die Diskretisierung der Gleichungen beruhen auf einer semidiskreten Formulierung von KNIPPERS [43], welche wiederum auf ATLURI ET AL. [5, 81] zurückgeht.

Galerkin-Formulierung

Die Modellgleichungen werden in eine Variationsformulierung eingebracht und führen nach partieller Integration auf die schwache Form

$$\int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dQ_0 + \int_{Q_{0,n}} \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}) : \mathbf{S} dQ_0 - \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dQ_0 \quad (3.46a)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} \left(\mathbb{C}^{-1} : \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \right) dQ_0 \quad (3.46b)$$

$$- \int_{P_{0,n}^t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 dP_0 = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{S} . \quad (3.46c)$$

Für die zeitdiskontinuierliche Formulierung sind der schwachen Form zwei Sprungterme, einer für die Geschwindigkeit

$$+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v} (t_n^+) \rho_0 (\mathbf{v} (t_n^+) - \mathbf{v} (t_n^-)) d\Omega_0 \quad (3.47)$$

und einer für die lokalen Elementspannungen

$$+ \sum_e \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{S} (t_n^+) : \mathbb{C}^{-1} : (\mathbf{S} (t_n^+) - \mathbf{S} (t_n^-)) d\Omega_0 , \quad (3.48)$$

hinzuzufügen.

Die eingeführten Spannungsfreiwerte sind nur lokal definiert und können daher, wie bei der gemischt formulierten Feder, auf Elementebene abgelöst werden, so dass als Freiwerte allein die Geschwindigkeiten in das globale Gleichungssystem eingehen. Zur Diskretisierung der schwachen Form werden für das Geschwindigkeitsfeld lineare Ansätze verwendet. Die Wahl der Ansatzfunktionen der Spannungen wird weiter unten diskutiert.

Als Folge der Formulierung in Raten ist bei numerischen Berechnungen darauf zu achten, dass sich Diskretisierungsfehler in der Zeit nicht aufsummieren.

Ansatzfunktionen der Spannungen

Zur Beschreibung von Starrkörperbewegungen sind die Ansatzfunktionen der Spannungen so zu wählen, dass sie keine Arbeit bei verzerrungsfreien Bewegungen leisten. Als Folge der drei möglichen Starrkörperbewegungen

im räumlich zweidimensionalen Fall dürfen gegenüber den acht Geschwindigkeitsfreiwerten die Spannungen nur fünf Freiwerte aufweisen [5, 81]. Unter Berücksichtigung linearer Ansätze in der Zeit beinhaltet der gewählte Satz Ansatzfunktionen

$$\tilde{S}_{11} = \hat{S}^1 + \hat{S}^2 \eta + (\hat{S}^3 + \hat{S}^4 \eta) \tau \quad (3.49a)$$

$$\tilde{S}_{22} = \hat{S}^5 + \hat{S}^6 \xi + (\hat{S}^7 + \hat{S}^8 \xi) \tau \quad (3.49b)$$

$$\tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{21} = \hat{S}^9 + \hat{S}^{10} \tau \quad (3.49c)$$

zehn lokale Spannungsfreiwerte auf Elementebene. Die Normalspannungen sind konstant in Spannungsrichtung und orthogonal dazu linear. Die Schubspannungen sind im Raum konstant und in der Zeit linear. Mit diesen Ansatzfunktionen ist der Spannungstensor bei rechteckigen Elementen a priori divergenzfrei. Die Wahl und die Auswirkungen dieser Spannungsansätze werden von HÜBNER in [31] näher diskutiert. Da für die Spannungen andere Ansätze verwendet werden als für die Testfunktionen und die Geometrie, ist dies formal kein isoparametrisches Element mehr; jedoch verschwinden die Spannungsfreiwerte durch Ablösung im globalen System, so dass das Element weiterhin als isoparametrisch bezeichnet wird.

Stabilisierung

Analog zur 2-Feld-Formulierung wird hier der schwachen Form ebenfalls ein GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierungsterm der Impulsbilanz

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \tau_M \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{S}) (\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{S}) - \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0) dQ_0 \quad (3.50)$$

mit dem Residuum der starken Form ohne Volumenkräfte

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{S}) = \rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}_0 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \quad (3.51)$$

hinzugefügt, wobei mit den verwendeten Ansatzfunktionen die Terme mit Divergenzoperator wiederum vernachlässigt werden. Bei Elementen mit höheren Ansätzen im Raum ist nach HÜBNER [31] eine Stabilisierung der Spannungen auf den Elementrändern notwendig, jedoch ist dies unerwünscht, da der numerische Aufwand ansteigt und die Topologie der Ränder zu den Elementen bekannt sein muss. Der Stabilisierungsparameter τ ändert sich gegenüber der in (3.45) gewählten Definition nicht.

Neben der Impulsbilanz besteht die Möglichkeit, die in der Ratenformulierung eingeführte konstitutive Beziehung als GALERKIN / Least-Squares-Term mit einzubeziehen. Jedoch bewirkt dies keine Verbesserung der Stabilisierung und wird somit nicht verwendet.

Vergleichsberechnung

Der in Abbildung 3.14 dargestellte Kragarm dient zum Vergleich und zur Bewertung der beiden mit der Raum-Zeit-Formulierung abgeleiteten Modelle für elastische Strukturen. Die Materialparameter im ebenen Spannungszustand sind wie folgt: Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^6 \text{ g/cm/s}^2$, Dichte $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ und Querkontraktionszahl $\nu = 0.35$. Die Systemwerte sind identisch mit den Werten der zweiten umströmten Platte des Anwendungsbeispiels in Abschnitt 4.2.

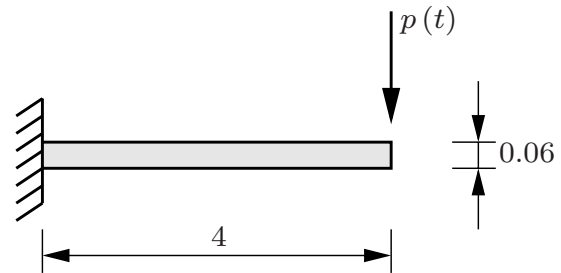


Abbildung 3.14: Kragarm

Die angegebene Last p beansprucht den Kragarm hauptsächlich auf Biegung. Eine Last von $p_0 = 1.6875 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ verursacht im statischen Fall bei Annahme eines BERNOULLI-Balkens eine Durchbiegung am Kragarmende von 1 cm. Die numerische Berechnung liefert die in Abbildung 3.15 aufgetragenen Verschiebungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente in Längsrichtung. Über die Höhe werden zwei Elemente verwendet. Zu erkennen

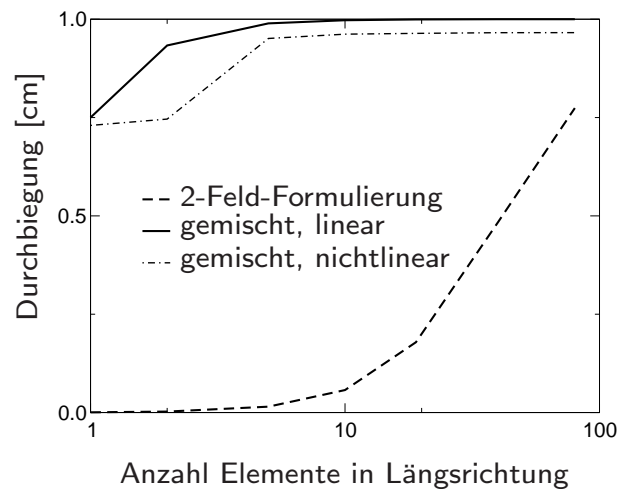


Abbildung 3.15: Stationäre Durchbiegung der Kragarmspitze

ist die gegenüber der gemischten Formulierung wesentlich langsamere Konvergenz der 2-Feld-Formulierung. Aus diesem Grund findet sie im Weiteren bei Berechnungsbeispielen keine Anwendung. Der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität ist bei der gegebenen Last beschränkt auf eine 3.5 %-ige Verminderung der Durchbiegung am Ende des Kragarms und ist näherungsweise vernachlässigbar.

Der Kragarm wird zur numerischen Untersuchung seines Schwingungsverhaltens impulsartig belastet. Die Anregung erfolgt mit dem Zehnfachen der stationären Last p_0 und der in Abbildung 3.16 skizzierten zeitlichen Verlaufsfunktion φ . Die Anregungsdauer von $t_p = 0.05$ s, etwa der halben Periodendauer der 3. Eigenschwingungsform, gewährleistet, dass in der numerischen Simulation mindestens die ersten drei Eigenschwingungsformen zu erkennen sind. Der Kragarm wird mit 2×40 Elementen diskretisiert. Die Berechnung erfolgt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.001$ s über einen Zeitraum von 20 s.

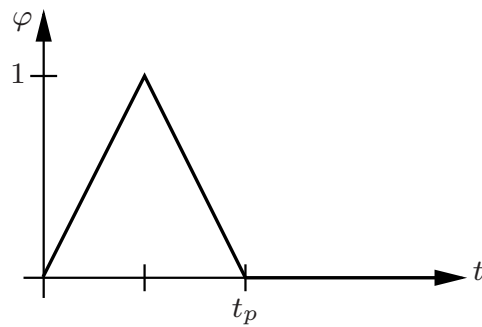


Abbildung 3.16: Impulsartige Last

Eine diskrete FOURIER-Transformation der Durchbiegungen liefert die in Abbildung 3.17 gezeigten Frequenzspektren. Die dominierenden Frequenzen

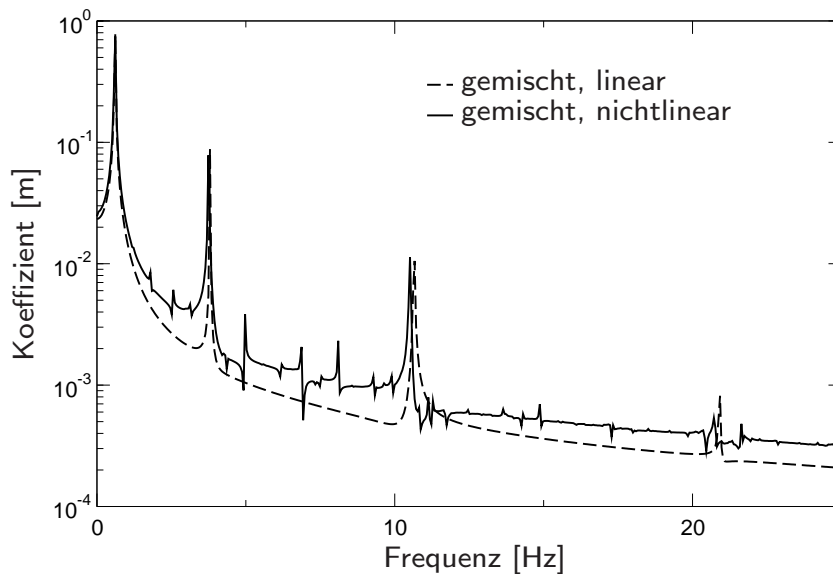


Abbildung 3.17: Frequenzspektrum der Durchbiegung

sind in Tabelle 3.1 eingetragen. Ebenfalls eingetragen sind die analytischen Eigenfrequenzen des BERNOULLI-Balkens [18]. Die Ergebnisse der linearen Theorie stimmen mit den analytischen Werten gut überein. Im nichtlinearen Fall ist der Schwingungsverlauf von den Verschiebungen abhängig, so dass eine Frequenzanalyse des Signals eigentlich nur für einen linearisierten Zustand zulässig ist. Als Folge treten im Frequenzspektrum oberhalb der ersten Eigenfrequenz deutlich mehr Frequenzspitzen mit kleinen Differenzen in den Ordinatenwerten auf. Die ersten drei Eigenfrequenzen werden aber genau genug aufgelöst.

| | 1. | 2. | 3. |
|-----------------------|-------|-------|-------|
| BERNOULLI-Balken | 0.606 | 3.796 | 10.63 |
| gemischt, linear | 0.61 | 3.80 | 10.67 |
| gemischt, nichtlinear | 0.61 | 3.74 | 10.51 |

Tabelle 3.1: Eigenfrequenzen in Hz

3.3 Fluiddynamik

Während zur Analyse von Aufgabenstellungen aus der Strukturmechanik hauptsächlich die Finite-Element-Methode Verwendung findet, so sind es in der Fluidmechanik im Wesentlichen drei Diskretisierungsverfahren: die Finite-Differenzen-, die Finite-Volumen- und die Finite-Element-Methode. Während die Finite-Differenzen-Methode als älteste der drei mit ihrer Beschränkung auf strukturierte Gitter langsam in den Hintergrund rückt, wird die Finite-Element-Methode zunehmend eingesetzt [35]. Das dominierende Verfahren in der Fluiddynamik ist aber die Finite-Volumen-Methode. In der vorliegenden Arbeit wird die Finite-Element-Methode eingesetzt, um ein einheitliches Verfahren zur Lösung von Aufgabenstellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung abzuleiten.

In den beiden folgenden Abschnitten wird die schwache Form und deren Stabilisierung erläutert. Im Abschnitt 3.4 wird auf die Behandlung von zeitlich veränderlichen Fluidgebieten eingegangen, welche zur Beschreibung von Wechselwirkungen mit der Struktur essenziell sind.

3.3.1 Galerkin-Formulierung

Die in Abschnitt 2.3.2 erläuterten inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen bilden die Grundlage des Fluidmodells. Zur numerischen Umsetzung wird, wie bei der Strukturdynamik, von einer Variationsformulierung ausgegangen. Diese führt nach partieller Integration auf die schwache Form

$$\int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dQ + 2\mu \int_{Q_n} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dQ \quad (3.52a)$$

$$- \int_{Q_n} \operatorname{div} \delta \mathbf{v} p dQ - \int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \bar{\mathbf{b}} dQ \quad (3.52b)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v} dQ \quad (3.52c)$$

$$- \int_{P_n^v} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dP + \int_{P_n^v} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) dP \quad (3.52d)$$

$$- \int_{P_n^t} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} dP = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \mathbf{t} \quad (3.52e)$$

Mit (3.52d) wird die DIRICHLET-Randbedingung (2.43) mit in die Variationsformulierung aufgenommen, so dass die zu wählenden Ansatzfunktionen diese Randbedingung nicht a priori erfüllen. Als zusätzliche Freiwerte entstehen Randspannungen \mathbf{t} auf dem DIRICHLET-Rand. Sie werden bei Aufgabenstellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung zur Kopplung verwendet und als Last auf die Struktur aufgebracht. Gleichzeitig sind die vorgegebenen Randgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ durch die Strukturgeschwindigkeiten \mathbf{v}^S zu ersetzen.

Das zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Verfahren wird wiederum verwendet, um die Übergangsbedingungen an den Zeit-Scheibengrenzen zu erfüllen. Die schwache Form (3.52) beinhaltet nur eine zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} , so dass zur Verknüpfung der Sprungterm

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega \quad (3.53)$$

der schwachen Form hinzugefügt wird.

Die Ansätze für Druck p und Randspannungen \mathbf{t} sind ebenfalls zeitdiskontinuierlich formuliert. Diese Zustandsgrößen unterliegen aber in der schwachen Form keiner zeitlichen Ableitung, so dass keine C^0 -Stetigkeit gefordert wird und keine Sprungterme notwendig sind.

3.3.2 Stabilisierung

Durch die EULERSche Betrachtungsweise des Fluids findet bei der Bildung der materiellen Zeitableitung die konvektive Zeitableitung $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ Eingang in die Modellgleichungen und in die schwache Form (3.52). Wie bei der Konvektions-Diffusions-Gleichung in Abschnitt 3.1.3 führt die Konvektion bei konvektionsdominanten Strömungen zu unphysikalischen, oszillierenden Lösungen.

Eine weitere Instabilität wird durch die gemischte Formulierung der NAVIER-STOKES-Gleichungen in das numerische Verfahren eingebracht. Werden Ansatzfunktionen gleicher Ordnung für die Zustandsgrößen Geschwindigkeiten \mathbf{v} und Druck p gewählt, so wird eine starke räumliche Oszillation des Druckfeldes hervorgerufen. Der Grund des unphysikalischen Verhaltens liegt in den unterschiedlichen Ableitungsordnungen der Zustandsgrößen in

$$b(\delta \mathbf{v}, p) = \int_Q \operatorname{div} \delta \mathbf{v} p \, dQ \quad . \quad (3.54)$$

Wird die Ansatzordnung des Drucks gegenüber der Ansatzordnung des variationellen Geschwindigkeitsfeldes zu groß, so kann es dazu kommen, dass die Testfunktionen nicht ausreichen, um alle möglichen Verläufe des Drucks, insbesondere die mit höherer Ordnung, zu testen. Als Folge sind die Ordnungen der Ansatzfunktionen und der Testfunktionen der Felder auszubalancieren, da sonst der Druck Verläufe aufweisen kann, bei denen er zusammen mit den Testfunktionen keinen oder nur einen geringen Arbeitsbeitrag leistet. Das zu lösende Gleichungssystem kann so auch singulär werden. Mathematisch betrachtet wird zur Ausbalancierung der Ansatz- und Testräume bei gemischten Formulierungen die Erfüllung der LBB-Bedingung (benannt nach LADYZHENSKAYA, BABŮSKA und BREZZI)

$$\inf_{p \in P_h} \sup_{\delta \mathbf{v} \in V_h} \frac{b(\delta \mathbf{v}, p)}{\|\delta \mathbf{v}\|_{V_h} \|p\|_{P_h}} \geq \beta \quad (3.55)$$

gefordert, wobei β eine positive Konstante ist, siehe BREZZI & FORTIN [14]. Die Erfüllung der Bedingung ist aber nicht trivial, da sie nicht nur lokal auf Elementebene, sondern auch global auf Systemebene zu erfüllen ist. Im folgenden Abschnitt wird ein Stabilisierungsverfahren angewendet, welches die gemischte Formulierung ohne explizite Erfüllung der LBB-Bedingung hinreichend stabilisiert.

Galerkin / Least-Squares-Stabilisierung

Zur Verhinderung von Oszillationen in der Lösung wird, wie bei den anderen Modellen, die GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierung verwendet. Sie unterdrückt zum einen, wie bei der Konvektions-Diffusions-Gleichung gezeigt, die Oszillationen, die aus der Konvektion herrühren, und zum anderen die Oszillationen des Druckfeldes, die durch die gemischte Formulierung entstehen. Die gemischte Formulierung ist mit dem Stabilisierungsverfahren stabil, so dass die Einhaltung der LBB-Bedingung (3.55) nicht zu zeigen ist [28].

Im Einzelnen werden der schwachen Form (3.52) zwei Terme hinzugefügt. Ein Least-Squares-Term der Impulsbilanz

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_M \frac{1}{\rho} \mathfrak{L}(\delta \mathbf{v}, \delta p) \cdot (\mathfrak{L}(\mathbf{v}, p) - \rho \bar{\mathbf{b}}) dQ \quad (3.56)$$

mit

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, p) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \quad (3.57)$$

als Residuum der starken Form ohne Volumenkraft und ein Least-Squares-Term der Kontinuitätsgleichung

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_C \rho \operatorname{div} \delta \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} dQ \quad (3.58)$$

Die verwendeten Stabilisierungsparameter sind von TEZDUYAR ET AL. [9, 72] abgeleitet. Als Erweiterung zu dem in der Literatur angegebenen Parameter für die Impulsbilanz

$$\tau_M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2|\tilde{\mathbf{v}}_e|}{h}\right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2}\right)^2}} \quad (3.59)$$

wird für die Elementgeschwindigkeit

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_{N,e} \quad (3.60)$$

die relative Geschwindigkeit bezüglich der Netzgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{N,e}$ gewählt. Im Grenzfall einer LAGRANGESchen Formulierung des mitbewegten Netzes, vgl. Abschnitt 3.3.3, bei der die Konvektion gegen null geht, ist die relative Geschwindigkeit klein, und der Term $\frac{2|\tilde{\mathbf{v}}_e|}{h}$ hat einen verschwindend geringen Einfluss auf den Stabilisierungsparameter.

Bei der Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung ist der Parameter

$$\tau_C = h|\tilde{\mathbf{v}}_e| \zeta(\text{Re}_e) \quad (3.61)$$

über die Funktion

$$\zeta(\text{Re}_e) = \begin{cases} \text{Re}_e/3 & \text{für } \text{Re}_e < 3 \\ 1 & \text{für } \text{Re}_e \geq 3 \end{cases} \quad (3.62)$$

von der Element-REYNOLDS-Zahl

$$\text{Re}_e = \frac{|\tilde{\mathbf{v}}_e|h}{2\nu} \quad (3.63)$$

abhängig.

Driven Cavity-Strömung

Zur Visualisierung der Problematik des oszillierenden Druckfeldes wird als Beispiel eine stationäre Driven Cavity-Strömung untersucht. Das System ist in Abbildung 3.18 dargestellt. Die Systemwerte sind wie folgt gewählt: Zähigkeit $\mu = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$, Dichte $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ und eingeprägte Randgeschwindigkeit $\bar{v} = 1 \text{ m/s}$. Zur Diskretisierung werden 20×20 Elemente verwendet, was insgesamt auf ein System mit 2646 Gleichungen führt.

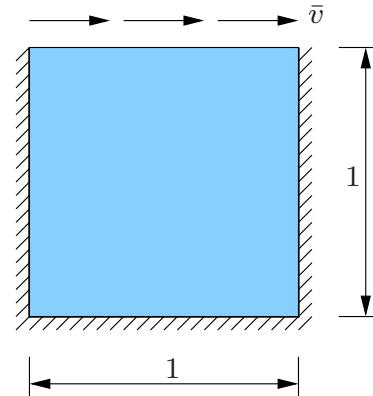


Abbildung 3.18: Driven Cavity-System

Die stationäre Lösung des Geschwindigkeitsfeldes ohne Stabilisierung ähnelt der Lösung mit Stabilisierung, siehe Abbildung 3.19 (oben). Das Druckfeld weist dagegen ohne Stabilisierung starke Oszillationen auf, die nicht der Physik entsprechen und somit das numerische Berechnungsmodell ohne Stabilisierung unbrauchbar machen.

Konvergenzuntersuchungen belegen, dass die Lösungen – mit der gewählten gemischten Formulierung mit linearen Ansätzen für Geschwindigkeiten und Druck – gegen die in der Literatur [74] angegebenen Lösungen konvergieren.

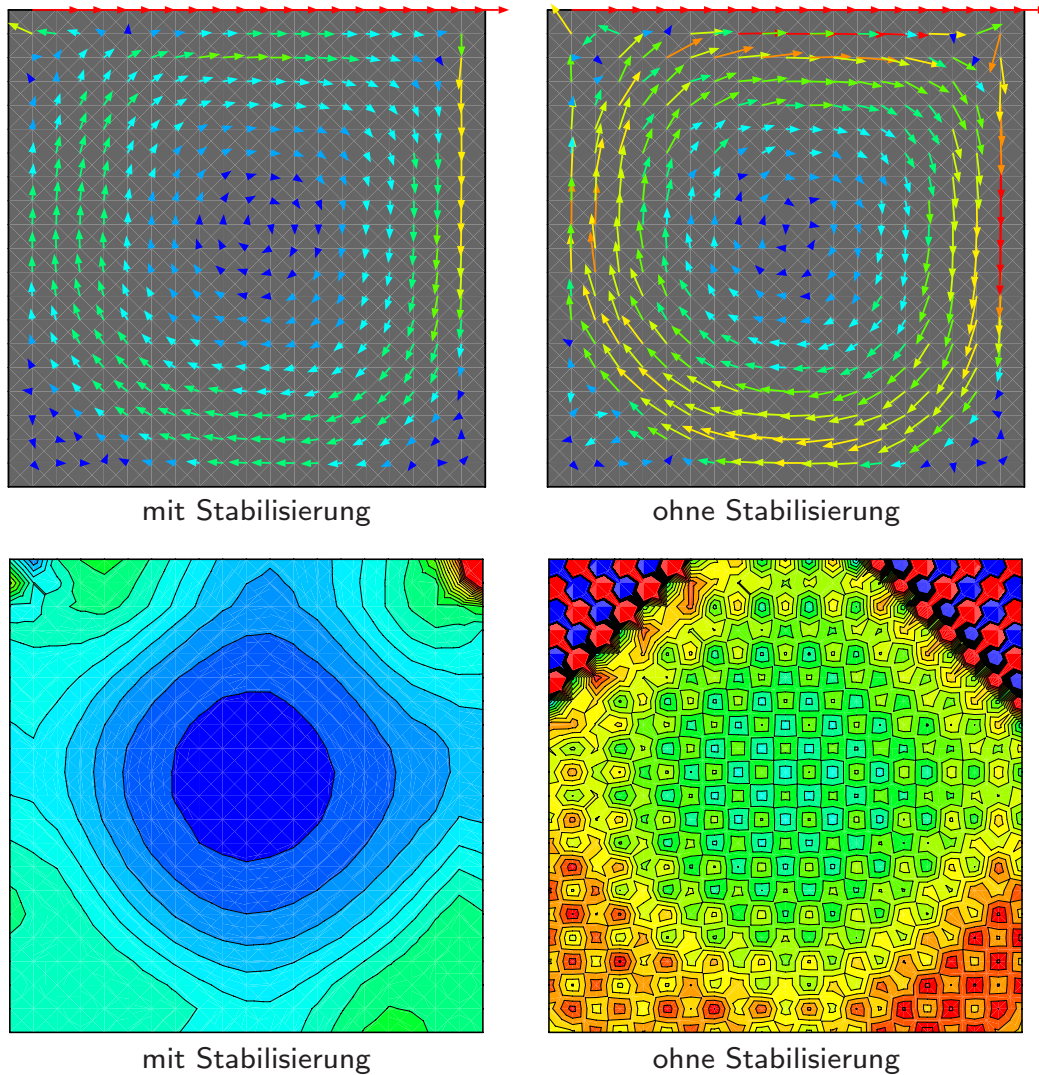


Abbildung 3.19: Einfluss der Stabilisierung auf das Geschwindigkeitsfeld (oben) und auf das Druckfeld (unten)

3.3.3 Veränderliches Fluidgebiet

Bei vielen Aufgabenstellungen der Strömungsmechanik, insbesondere bei solchen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung, verändert sich im zeitlichen Verlauf die Berandung des Fluidgebiets. Da für das Fluid meist die EULERSche Betrachtungsweise gewählt wird, ist sicherzustellen, dass das Berechnungsmodell die Veränderung des Randes erfassen kann.

Bei der klassischen, semidiskreten Formulierung wird dies durch zwei Schritte erreicht: zum einen wird die veränderte Lage des diskretisierten Gebiets aus dem aktuellen Geschwindigkeitsfeld bestimmt; zum anderen wird die Netzgeschwindigkeit in den Modellgleichungen berücksichtigt und findet so

Eingang bei der räumlichen Integration. Als Folge findet keine Integration über das sich verändernde Gebiet statt, und das Verfahren ist ohne weitere Modifikationen nur für bestimmte Aufgabenstellungen, wie eine translatorische Netzbewegung entlang einer ausgezeichneten Richtung eines orthogonalen, strukturierten Finite-Element-Netzes, exakt.

Durch Betrachtung des Raum-Zeit-Gebiets mit der hier verwendeten Raum-Zeit-Formulierung wird diese Problematik auf elegante Art und Weise umgangen. Im Gegensatz zu einer semidiskreten Formulierung werden die Modellgleichungen im Raum-Zeit-Gebiet einheitlich formuliert und integriert, so dass eine Änderung des Fluidgebiets allein durch Änderung des Integrationsgebiets, d. h. das Mitbewegen des Finite-Element-Netzes, berücksichtigt werden kann. Für ein mitbewegtes Raum-Zeit-Netz, wie es z. B. in Abbil-

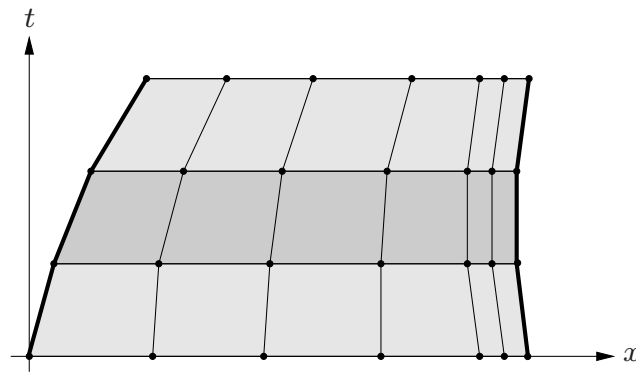


Abbildung 3.20: Mitbewegtes Raum-Zeit-Netz

dung 3.20 dargestellt ist, bleibt aber die Aufgabe, geeignete Verfahren zur Beschreibung der Netzbewegung zu entwickeln. Sie wird, nachdem das Vorgehen bei einer semidiskreten Formulierung aufgezeigt wird, in den nachfolgenden Abschnitten für verschiedene Aufgabenstellungen angegangen.

Analogie zur ALE-Formulierung

Bei semidiskreten Formulierungen ist das räumliche Gebiet innerhalb eines Zeitschritts verschiebbar, so dass die in einem Zeitschritt eigentlich vorhandene Gebietsänderung in den Modellgleichungen berücksichtigt werden muss. Am Beispiel der Massenbilanz für inkompressible Fluide lässt sich das Vorgehen erläutern. In Abbildung 3.21 ist das räumliche Gebiet zu zwei Zeitpunkten dargestellt. Der Rand des Gebiets möge sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_N fortbewegen. Soll die Masse im Gebiet erhalten bleiben, so muss

$$\int_{\Gamma(t_n)} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_N) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (3.64)$$

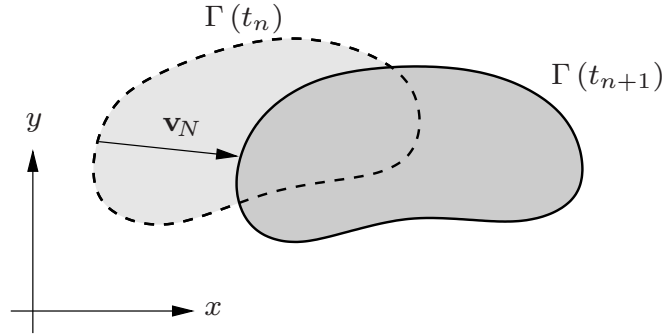


Abbildung 3.21: Räumliches Gebiet zu zwei Zeitpunkten

erfüllt werden [77]. Als Grenzfälle folgen für $\mathbf{v}_N = \mathbf{v}$ die LAGRANGESche und für $\mathbf{v}_N = \mathbf{0}$ die EULERSche Betrachtungsweise. Durch die Möglichkeit, beliebige Konfigurationen zwischen den beiden Grenzwerten zu betrachten, wird die Formulierung als ALE-Formulierung (engl. Arbitrary LAGRANGIAN-EULERIAN)³ bezeichnet.

Die modifizierten Modellgleichungen stellen aber nicht sicher, dass das Diskretisierungsverfahren bezüglich des mitbewegten Gebiets weiterhin konservativ ist. FERZIGER & PERIC [23] zeigen anhand eines rechteckigen Kontrollvolumens den Fehler, der unter Verwendung der ALE-Formulierung bei der Finite-Volumen-Methode entstehen kann. In der Literatur findet man diese Problematik unter den Begriffen *Geometric Conservation Law (GCL)* oder *Space Conservation Law (SCL)*.

LESOINNE & FARHAT [45] zeigen, dass das Geometric Conservation Law von vornherein von der Raum-Zeit-Formulierung erfüllt wird. Dies kann an einem vereinfachenden Beispiel numerisch verifiziert werden. Innerhalb des Fluidgebiets sind hierzu die Raum-Zeit-Knoten abhängig von der Zeit in räumlicher Richtung „beliebig“ zu verschieben, ohne dass einzelne Elemente dabei entarten, d. h. zu spitze Winkel bilden oder sich überlappen. Als Randbedingungen sind ausschließlich DIRICHLET-Randbedingungen der Form $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ dem in Ruhe befindlichen Fluid einzuprägen. Wird das so eingeführte System berechnet, darf das Fluid zu keinem Zeitpunkt seinen Ruhezustand verlassen, ansonsten wird das GCL nicht eingehalten. Durch zusätzliche Bedingungen kann eine semidiskrete Formulierung so erweitert werden, dass sie das GCL erfüllt, wobei der numerische Aufwand dadurch erhöht wird.

Die globale Massenbilanz wird von der Raum-Zeit-Formulierung nicht auto-

³Da die Bezeichnung *ALE-Formulierung* im Allgemeinen mit einer semidiskreten Formulierung verknüpft wird, wird sie für die Formulierung im mitbewegtem Raum-Zeit-Gebiet – für die sie ebenfalls zutreffend wäre – nicht verwendet.

matisch erfüllt. So kann der Fluidrand „beliebig“ mitbewegt werden, ohne die Massenbilanz zu beachten, so dass die räumliche Gebietsänderung nicht mit dem Massenfluss über den Rand im Einklang stehen muss.

Die Analogie zur ALE-Formulierung und die Konsequenzen aus der Raum-Zeit-Formulierung auf einem veränderlichen Gebiet werden mit Hilfe der JACOBI-Matrix des Elements aus Abbildung 3.22 erläutert. Die Matrix stellt

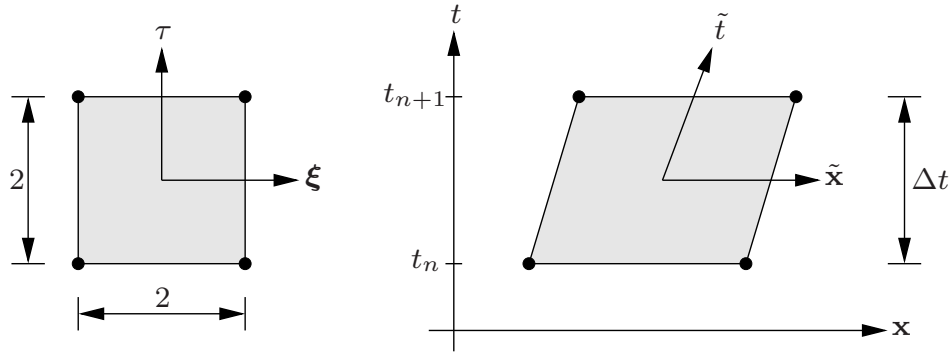


Abbildung 3.22: Referenzelement und mitbewegtes Raum-Zeit-Element

die Transformationsbeziehung zwischen dem physikalischen Gebiet und dem Referenzgebiet auf Parameterebene bzw. lokaler Ebene her. Es wird davon ausgegangen, dass die Zeit-Scheibengrenzen orthogonal zur Zeitachse verlaufen. Aus den partiellen Ableitungen der lokalen nach den globalen Koordinaten folgt die Inverse der JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial (\xi, \tau)}{\partial (\mathbf{x}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Einsetzen der Abmessungen des Referenzelements und der Netzgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_N = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (3.66)$$

führt auf

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}_N \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} & \frac{2}{\Delta t} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Einsetzen der Komponenten der JACOBI-Matrix in die räumliche Darstellung

der materiellen Zeitableitung liefert

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.68a)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \mathbf{v}_N \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.68b)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{2}{\Delta t} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_N) \cdot \nabla \mathbf{v} . \quad (3.68c)$$

Der zweite Term von (3.68c) repräsentiert – wie bei der ALE-Formulierung – die konvektive Zeitableitung auf dem mitbewegten Netz mit der Differenz der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes und der Netzgeschwindigkeit \mathbf{v}_N . Es ist wiederum zu erkennen, dass als Grenzwert bei einem unverschieblichen Netz der Term $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ und somit \mathbf{v}_N verschwindet und die EULERSche Betrachtungsweise exakt abgebildet wird. Auf der anderen Seite wird bei isoparametrischen Elementen näherungsweise die LAGRANGESche Betrachtungsweise abgebildet, wenn die räumlichen Knotenkoordinaten mit dem Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Die LAGRANGESche Betrachtungsweise wird aber nur näherungsweise erreicht, da die Netzgeschwindigkeit \mathbf{v}_N durch die zeitliche Ableitung nur eine abschnittsweise konstante Funktion in der Zeit darstellt. Um sie dagegen numerisch exakt zu erfüllen, müssen für die Geometrie in der Zeit Ansätze höherer Ordnung gewählt werden, siehe HANSBO [28, 29].

Lagrangesche Betrachtungsweise

Eine einfache Möglichkeit, ein sich veränderndes Fluidgebiet zu beschreiben, besteht darin, eine LAGRANGESche Betrachtungsweise für das Gebiet zu verwenden. Die räumliche Lage der Knoten wird dabei direkt aus den Knotengeschwindigkeiten durch zeitliche Integration

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \int_{I_n} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.69)$$

bestimmt.

Das Vorgehen hat jedoch zwei entscheidende Nachteile: zum einen besteht die Gefahr, dass einzelne Elemente entarten; zum anderen bewegt sich das gesamte Gebiet mit der Strömung mit, so dass z. B. bei einem Überfall über ein Wehr am Wehr selbst schon nach kurzer Zeit kein Berechnungsgebiet mehr vorhanden ist.

Für spezielle Aufgabenstellungen, wie z.B. einen Tank mit schwappenden Flüssigkeit oder einen Dammbruch, eignet sich dieses Vorgehen aber durchaus. Ein Dammbruch kann durch eine Wassersäule simuliert werden, bei der eine Stützwand entfernt wird. Das Fluid des in Abbildung 3.23 skizzierten Damms hat eine Dichte von $\rho = 0.9982 \text{ g/cm}^3$ und eine Zähigkeit von $\mu = 0.01002 \text{ g/s/cm}$. Zum Vergleich mit Literaturwerten erhält die Gravitation den Wert $g = 1 \text{ cm/s}^2$. Die Berechnung erfolgt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ über einen Zeitraum von 4 s .

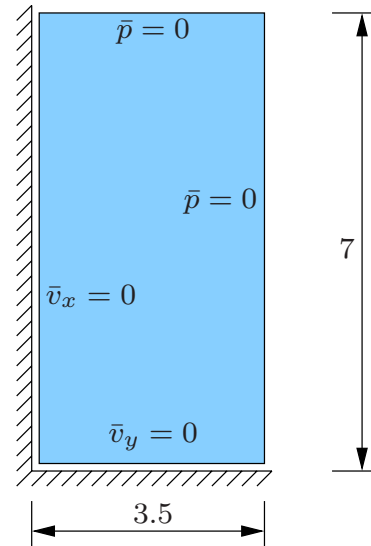


Abbildung 3.23: Dammbruch

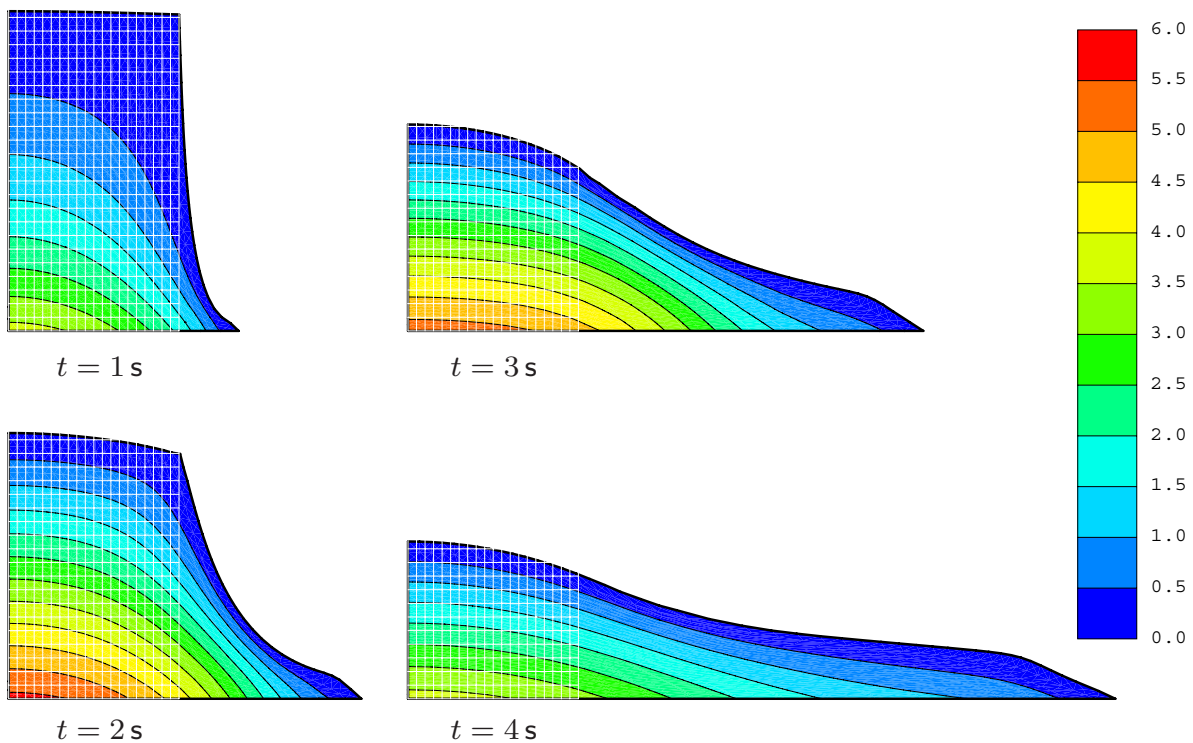


Abbildung 3.24: Druckfeld auf mitbewegtem Netz

Das Druckfeld ist in Abbildung 3.24 zu verschiedenen Zeitpunkten auf dem mitbewegtem Netz dargestellt. Während der Fallbewegung des Fluids steigt der Druck im linken unteren Eckbereich an. Im Verlauf der Zeit geht die Fallbewegung in eine Ausbreitungsbewegung über. Dabei sinken die Ge-

schwindigkeiten im Eckbereich, der Druck wird kleiner, und es kommt zur Ausbildung eines hydrostatischen Druckverlaufs.

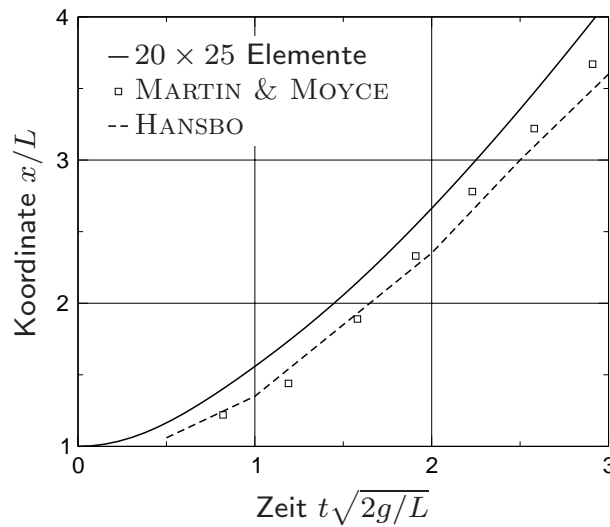


Abbildung 3.25: Verschiebungsverlauf

Der Zeitverlauf in Abbildung 3.25 stellt dimensionslos die horizontale Verschiebung des unteren rechten Eckpunktes dar. Zum Vergleich sind die experimentellen Werte von MARTIN & MOYCE [49] bei einer Sohlenbreite in der Ausgangslage von $1\frac{1}{8}$ inch mit Symbolen eingetragen. Sie liegen mit annähernd konstantem Abstand etwas unterhalb der hier ermittelten Werte. HANSBO berechnet mit seiner Raum-Zeit-Formulierung in [28] ähnliche Werte wie die experimentell ermittelten Werte, wobei er konstante Ansätze in der Zeit für die Geschwindigkeiten und eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.25$ s verwendet, so dass die numerische Dämpfung bei seinen Berechnungen größer ist. Den hier berechneten Ergebnissen vergleichbar sind die von BÜRGISSE [16], der zudem den Zähigkeitseinfluss untersucht.

Freie Oberfläche

Bei den meisten Anwendungen mit einer freien Oberfläche eignet sich die im vorherigen Abschnitt erläuterte LAGRANGESche Formulierung nicht. Anwendungen sind z. B. der Überfall über ein Wehr oder der weiter unten untersuchte Freistrah. Bei ihnen darf sich die freie Oberfläche in vertikaler Richtung frei bewegen, jedoch wird sie in horizontaler Richtung, wie auch alle anderen Ränder, festgehalten. Folglich ist das Kontrollvolumen im Wesentlichen ortsfest. Bei dem Modell zur Beschreibung freier Oberflächen sind Oberflächenspannungen, siehe z. B. MORAND & OHAYON [51], nicht berück-

sichtigt, da der Einfluss bei den in dieser Arbeit betrachteten Aufgabenstellungen vernachlässigbar ist.

Betrachtet man ein Fluidgebiet mit freier Oberfläche, so ändert sich die räumliche Geometrie nur normal zum Rand. Die Knoten des Finite-Element-Netzes müssen sich demnach ebenfalls nur normal zum Rand bewegen. Eine Bewegung tangential zum Rand verändert hingegen die Geometrie des Fluidgebiets nicht, sondern hat nur Einfluss auf die Geometrie einzelner Elemente. Die räumlichen Koordinaten lassen sich somit aus der Geschwindigkeit in Normalenrichtung ermitteln

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \int_{I_n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} dt . \quad (3.70)$$

Die Normale \mathbf{n} ist an einem Randknoten i nicht eindeutig definiert, da das mit linearen Ansätzen diskretisierte räumliche Gebiet an Randknoten nur C^0 -stetig ist, siehe Abbildung 3.26. GRESHO & SANI [24] leiten aus der

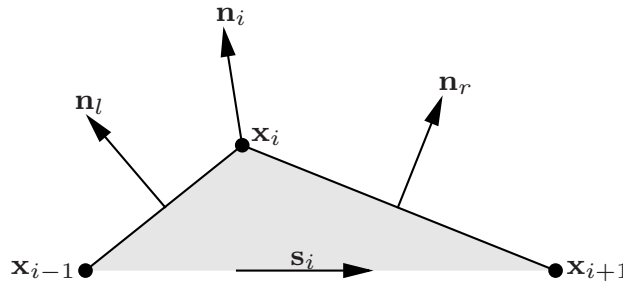


Abbildung 3.26: Knotennormale \mathbf{n}_i auf freier Oberfläche

Inkompressibilitätsbedingung eine eindeutige, massenkonsistente Normale

$$\mathbf{n}_i = \int_{\Gamma} \mathbf{n} N_i d\Gamma \quad (3.71)$$

ab. Bei den hier verwendeten linearen Ansatzfunktionen N_i zur Diskretisierung des räumlichen Gebiets vereinfacht sich das Integral zu einer Summe, in die die Längen l_l und l_r der adjunkten Kanten eingeht. Das führt auf die noch zu normierende Normale

$$\mathbf{n}_i = l_l \mathbf{n}_l + l_r \mathbf{n}_r . \quad (3.72)$$

Stabilisierung Die mit (3.70) berechnete Geometrie der freien Oberfläche kann zu Oszillationen neigen. Durch numerische Ungenauigkeiten kann sich

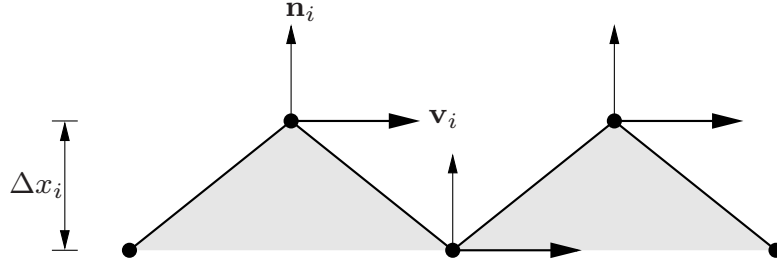


Abbildung 3.27: Geometrisch zulässige freie Oberfläche

der in Abbildung 3.27 dargestellte, physikalisch falsche Polygonzug der Oberfläche einstellen, obwohl der eingeführte Normalenvektor am Knoten senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht.

Bei einer sinnvollen Diskretisierung treten nur kleine Winkeländerungen der Oberfläche an einem Knoten auf. Große unphysikalische Winkeländerungen können mit einem zusätzlichen Term bei der Berechnung der Oberflächengeometrie

$$\mathbf{x}_i(t_{n+1}) = \mathbf{x}_i(t_n) + \int_{I_n} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i + \alpha \cdot \tilde{v}_i) \mathbf{n}_i dt \quad (3.73)$$

verhindert werden. Die Korrekturgeschwindigkeit $\tilde{v}_i = \pm \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$ folgt aus dem Abstand Δx_i aus Abbildung 3.27. Der Parameter α regelt die Größe der Korrekturverschiebung. Er soll für kleine Winkel schnell gegen null gehen und für große Winkel mit eins beschränkt sein. Als Funktion wird hierzu

$$\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n}_r + 1)\right)^\beta} - 1 \quad (3.74)$$

gewählt. Der Parameter β bestimmt die Ordnung, mit der der Nenner kleiner und die Korrekturverschiebung verstärkt wird. Der Einfluss des Parameters α auf die Lösung kann durch seinen stark nichtlinearen Verlauf mit Netzverfeinerungsstudien numerisch untersucht werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Stabilisierung der Oberflächengeometrie besteht im Upwinding bei der Berechnung der Knotennormale. Aus den adjunkten Kantennormalen wird die Knotennormale durch eine stärkere Wichtung der stromaufwärts liegenden Kantennormale zu

$$\mathbf{n}_i = \begin{cases} \tau \mathbf{n}_l + (1 - \tau) \mathbf{n}_r & \text{für } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{s}_i \geq 0 \\ (1 - \tau) \mathbf{n}_l + \tau \mathbf{n}_r & \text{für } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{s}_i < 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

bestimmt. Der Upwind-Parameter τ steuert das Verhältnis der adjunkten

Kantennormalen. Die Strömungsrichtung wird mit dem Skalarprodukt $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{s}_i$ mit dem Vektor $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}$, siehe Abbildung 3.27, bestimmt.

Freistrahls als Berechnungsbeispiel Zur Verifizierung wird der Überfall eines Wasserstrahls über eine reibungsfreie, horizontale Sohle untersucht, wie es in Abbildung 3.28 dargestellt ist. Das Beispiel ist BÜRGISSE [16] entnommen.

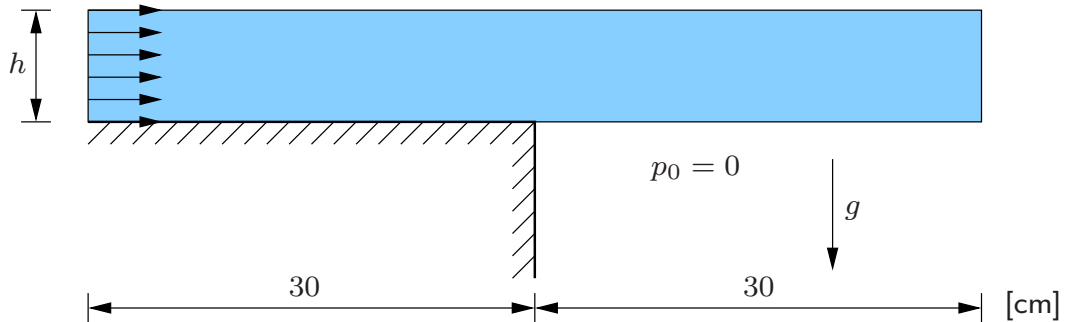


Abbildung 3.28: Freier Überfall: System in Ausgangslage

Als Ausgangssystem wird eine homogene Strömung mit dem spezifischen Zufluss $q = 643 \text{ cm}^2/\text{s}$ verwendet. Die Zuflusswassertiefe $h = \kappa \cdot y_c$ wird in Abhängigkeit der kritischen Wassertiefe $y_c = 7.5 \text{ cm}$ gewählt. Die Berechnungen erfolgen für die kritische Wassertiefe $\kappa = 1$ und zwei schießende Wassertiefen $\kappa = 0.68$ und $\kappa = 0.49$, was den FROUDE-Zahlen $\text{Fr} = 1, 1.78$ und 2.91 entspricht. Durch die Störung am Ende der Sohle ist eine Stabilisierung der freien Oberfläche unumgänglich. Hierzu wird das Upwinding mit $\tau = 0.65$ angewendet. Der Druck wird an den freien Oberflächen zu null vorgegeben. Die Strömung unterliegt der Gravitation $g = 981 \text{ cm/s}^2$. Das Berechnungsnetz ist für die stationäre Lösung mit $\kappa = 0.68$ in Abbildung 3.30 dargestellt. Es besteht aus 530 Knoten und 468 Elementen. Bei den Berechnungen wird eine horizontale Verschiebung der Oberflächenknoten ausgeschlossen.

Die stationären Lösungen der Strömungsgeometrien sind in Abbildung 3.29 eingetragen. Schon mit der recht groben Diskretisierung zeigen die berechneten Geometrien eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten von MARCHI [48], die mit Symbolen eingezeichnet sind. Die zu $\kappa = 0.68$ gehörende stationäre Geschwindigkeitsverteilung zum Zeitpunkt $t = 0.7 \text{ s}$ ist in Abbildung 3.30 auf der deformierten Geometrie aufgetragen. Die lineare Änderung der Geschwindigkeit im Bereich des Freistrahls ist mit den horizontal verlaufenden Isolinien klar zu erkennen.

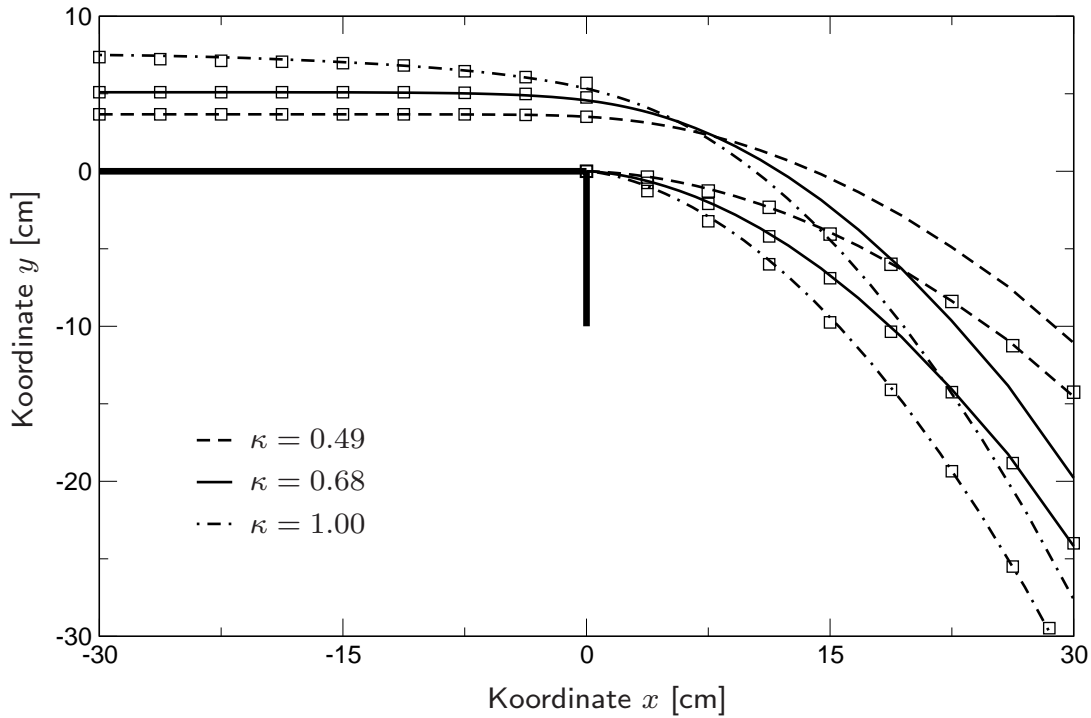


Abbildung 3.29: Berechnete stationäre Geometrien im Vergleich mit experimentellen Werten (Symbole) von MARCHI [48]

Der zeitliche Verlauf der Geometrie und der Strömungsgeschwindigkeiten ist ebenfalls in Abbildung 3.30 für $\kappa = 0.68$ dargestellt. Das stromabwärts von der Kante bzw. von der sich ausbildenden gekrümmten Oberfläche liegende Fluidgebiet fällt beschleunigt durch die Gravitation ohne Änderung der Wassertiefe nach unten. Am Ende der gekrümmten Oberfläche bildet sich eine lokal erhöhte Wassertiefe aus. Sie entsteht durch den hydrostatischen Druck des Ausgangssystems und wird mit der Strömung transportiert, so dass sie in der stationären Lösung nicht mehr erscheint. Numerische oder experimentelle Werte liegen zum Vergleich der zeitlichen Entwicklung nicht vor.

Im Vergleich der beiden Verfahren zur Stabilisierung der Oberfläche zeigt sich bei der Upwind-Stabilisierung ein glatterer zeitlicher Verlauf, wobei die stationären Lösungen nahezu identisch sind. Für weitere Simulationen ist daher die Upwind-Stabilisierung zu empfehlen.

Pseudo-Struktur

Zur mathematischen Beschreibung des mitbewegten Gebiets genügt es, die Veränderung des Randes zu beschreiben. Um aber sinnvolle Ergebnisse mit

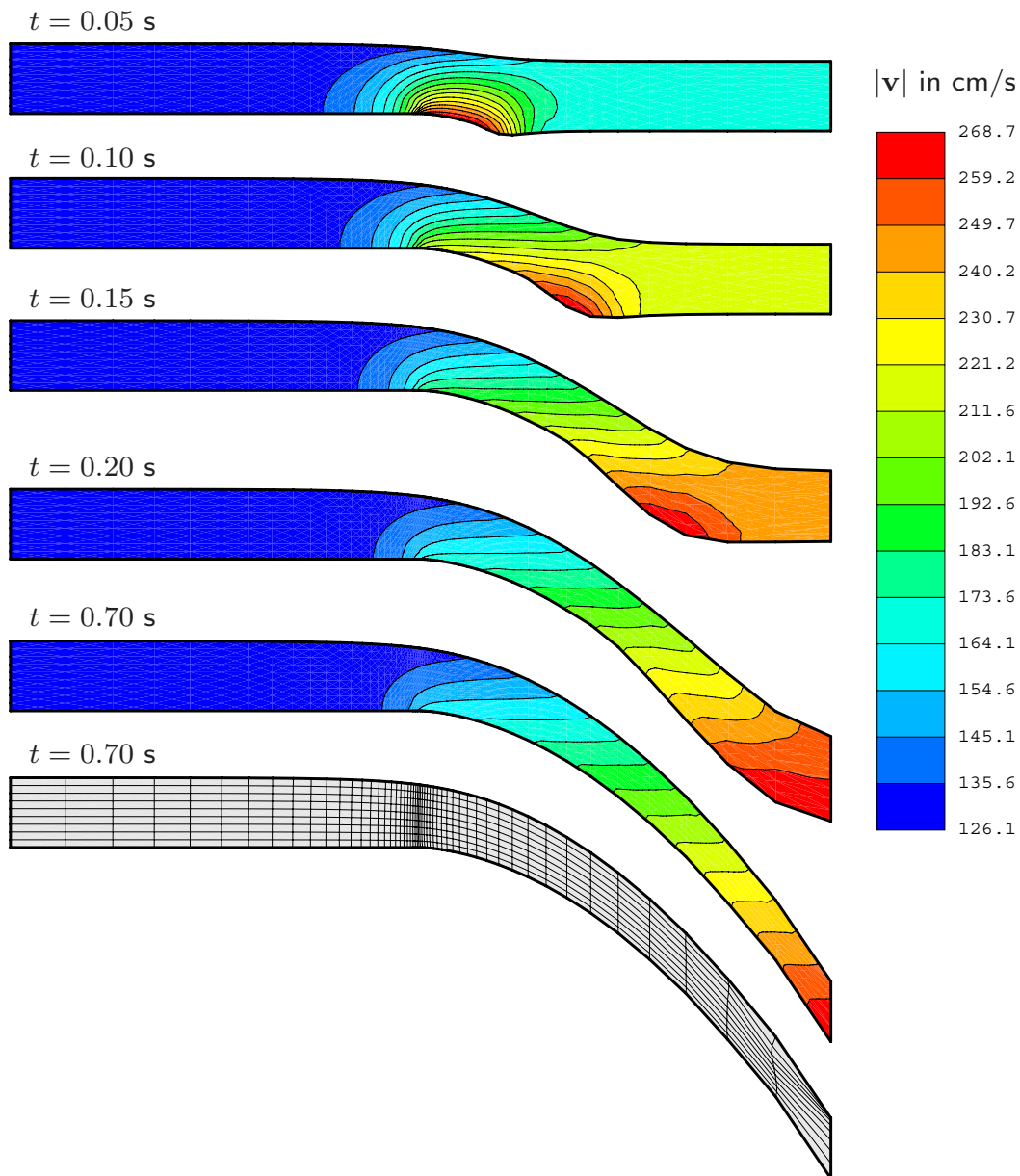


Abbildung 3.30: Geschwindigkeitsverteilung auf mitbewegter Geometrie

der Finite-Element-Methode zu erhalten, ist es notwendig, dass keine Elemente dabei entarten. Im Allgemeinen muss die Geometrie von jedem Element betrachtet werden, bei dem ein Geometrieknoten mitbewegt wird. Das hat zur Folge, dass meist das gesamte Finite-Element-Netz mitbewegt wird, wie es bei der Berechnung des Freistrahls im vorangegangenen Abschnitt durchgeführt wird und in Abbildung 3.30 zu erkennen ist. Ein allgemeingültiges Verfahren zur Berechnung der räumlichen Lage der einzelnen Knoten existiert nicht. Insbesondere bei sich stark verändernden Gebieten kann es unumgänglich sein, eine Neuvernetzung vorzunehmen.

Reicht die LAGRANGESche Betrachtungsweise des Gebiets nicht mehr aus, wird in dieser Arbeit für das mitbewegte Netz eine Pseudo-Struktur betrachtet. Das Fluidgebiet wird auf ein Strukturgebiet abgebildet, das mit der linearen Elastizitätstheorie beschrieben wird. Da diese Struktur nicht zur eigentlichen Aufgabenstellung gehört, wird sie als Pseudo-Struktur bezeichnet. Die zuvor berechnete Oberflächenverformung wird der Pseudo-Struktur als vorgegebene Randverschiebung eingeprägt. Aus der berechneten Verschiebungsfigur wird die neue räumliche Lage des Finite-Element-Netzes am Ende der Zeit-Scheibe bestimmt.

Im Vorgriff auf Aufgabenstellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung wird das Verfahren mithilfe der Abbildung 3.31 anschaulich erläutert. Darin bildet

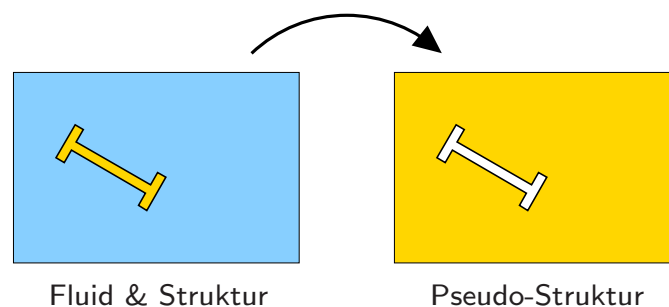


Abbildung 3.31: Mitbewegtes Fluidgebiet als Pseudo-Struktur

im linken Gebiet der gemeinsame Rand von Fluid und Struktur, der Koppelungsrand, eine Oberfläche des Fluids. Dieser wird in seiner räumlichen Lage durch die Strukturverschiebungen, hier den Brückenquerschnitt, verändert. Die Verschiebungen werden der Pseudo-Struktur (rechts) als Randbedingungen eingeprägt. Bei der Berechnung der Verschiebungsfigur wird der äußere, umgebende Rand festgehalten.

Treten größere Verschiebungen des Randes auf, z. B. infolge starker Rotationen, so kann das Netz trotzdem entarten. Die Entartung der Elemente ist eine Folge der Elementabmessungen, die sich häufig um Größenordnungen unterscheiden, und der verwendeten linearen Elastizitätstheorie. JOHNSON & TEZDUYAR schlagen in [40] vor, die JACOBI-Determinante bei der Integration zu vernachlässigen, um Gebieten mit kleinen Elementen eine höhere Steifigkeit zuzuordnen, so dass deren Entartung entgegengewirkt wird. Da dieses Verfahren dem Anwender keine Steuerungsmöglichkeit der Steifigkeitszuordnung lässt und somit die Ergebnisse unbefriedigend sein können, findet es hier keine Verwendung.

Eine Steifigkeitsverteilung in Abhängigkeit von der Elementgröße ermöglicht dagegen eine gezielte Beeinflussung der Elementverformungen, so dass bei-

spielsweise in Grenzschichten die Elemente nahezu unverformt bleiben. Dies wird durch Definition eines Funktionsverlaufes für den Elastizitätsmodul E erreicht, der kleinen Elementen eine größere Steifigkeit als größeren Elementen zuordnet. In Abhängigkeit von der charakteristischen Elementgröße h wird der Elastizitätsmodul mit

$$E(h) = E_{\min} + f(h) \cdot (E_{\max} - E_{\min}) \quad (3.76)$$

aus einem Intervall, z. B. $E \in [E_{\min} = 1, E_{\max} = 10^6]$, ermittelt. Die Funktion $f(h)$ sollte einen stark nichtlinearen Funktionsverlauf, wie in Abbildung 3.32 dargestellt, aufweisen.

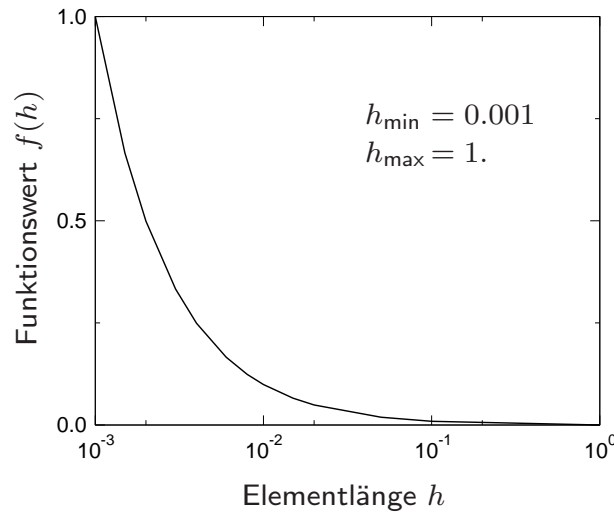


Abbildung 3.32: Verlauf der Funktion $f(h)$ mit $f^*(h) = h$

Zur Definition des Verlaufs bieten sich Funktionen vom Typ $\frac{1}{x}$ oder α^x an. Der abgebildete Funktionsverlauf entspricht der Funktion

$$f(h) = \frac{\frac{1}{f^*(h)} - \frac{1}{h_{\max}}}{\frac{1}{h_{\min}} - \frac{1}{h_{\max}}} \quad (3.77)$$

mit der kleinsten und der größten charakteristischen Elementlänge h_{\min} und h_{\max} aller Elemente. In (3.77) kann $f^*(h) = h$ gesetzt oder zur Anpassung an die jeweilige Aufgabenstellung eine andere Funktion gewählt werden. In den numerischen Berechnungen in Kapitel 4 ist sie zu

$$f^*(h) = h_{\min} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{h - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}} \right) \cdot (h_{\max} - h_{\min}) \quad (3.78)$$

gewählt.

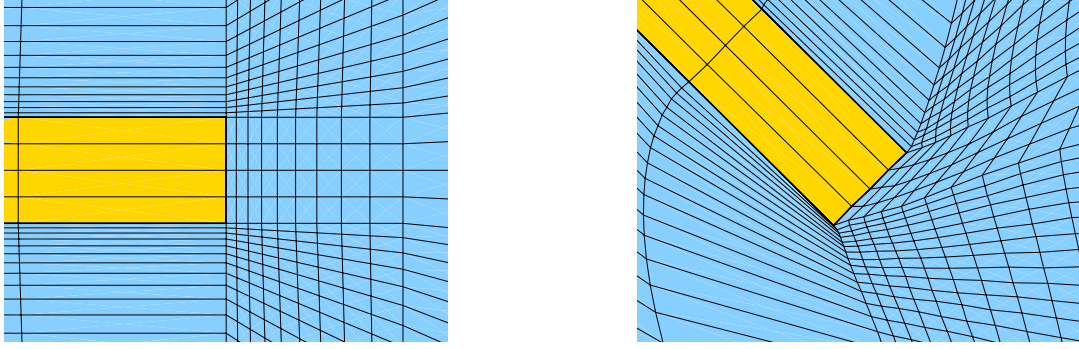


Abbildung 3.33: FE-Netz: Referenz- und Momentankonfiguration

Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens zeigt sich bei der Berechnung der wirbelerregten elastischen Platte aus Abschnitt 4.2. In Abbildung 3.33 ist ein Teil des Finite-Element-Netzes in seiner Momentankonfiguration der Ausgangslage gegenübergestellt. Die Verdrehung des Plattenendes beträgt etwa 45° , ohne dass einzelne Elemente wesentlich entarten.

Wird ein direkter Gleichungslöser verwendet, ist der numerische Aufwand zur Berechnung der Pseudo-Struktur vernachlässigbar, da die Systemmatrix nur einmal zu zerlegen ist.

Neuvernetzung

Neben den in dieser Arbeit verwendeten Möglichkeiten zur Beschreibung des mitbewegten Finite-Element-Netzes stellt die Neuvernetzung eine völlig andersartige Methode dar, bei der abhängig von dem mitbewegten Rand ein neues Netz erzeugt wird. Mit der verwendeten zeitdiskontinuierlichen GALERKIN-Formulierung ist die Schnittstelle zwischen dem alten und dem neuen Netz bereits definiert. Die durch die Formulierung in die schwachen Formen eingebrachten Sprungterme, z. B. des Geschwindigkeitsfeldes

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho(\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega , \quad (3.79)$$

sind als einzige Bedingung zu erfüllen. Jedoch ist die exakte Auswertung des Integrals numerisch sehr aufwändig, da die Felder zu den beiden Zeitpunkten t_n^+ und t_n^- auf den verschiedenen Netzen definiert sind. Einen Einstieg in die benötigten Such- und Interpolationsalgorithmen gibt LÖHNER in [47]. Eine Neuvernetzung kann auch bei den hier angewendeten Methoden notwendig werden, wenn sich einzelne Elemente überlappen oder entarten. In dieser Arbeit ist eine Neuvernetzung des Fluidgebiets bei den Anwendungsbeispielen nicht notwendig und wird daher nicht durchgeführt.

3.4 Fluid-Struktur-Kopplung

Die in dieser Arbeit betrachteten Aufgabenstellungen mit Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur bedürfen gegenüber Aufgabenstellungen mit nur einem Kontinuum besonderer Lösungsstrategien. Dies liegt in dem völlig unterschiedlichen physikalischen Verhalten von Fluid und Struktur begründet, was bei einer klassischen Formulierung zu unterschiedlichen Modellierungen und numerischen Diskretisierungsverfahren führt. Zudem existiert in der Fluidmechanik eine große Auswahl verschiedener Verfahren, die spezielle Strömungen behandeln.

Neben der historisch getrennten Entwicklung der Fluid- und Strukturmechanik liegt für die Kopplung bezüglich der Modellbildung die wesentliche Schwierigkeit in den unterschiedlichen Betrachtungsweisen. Während für die Struktur fast ausschließlich die LAGRANGESche Betrachtungsweise verwendet wird, dominiert beim Fluid die EULERSche Betrachtungsweise. Mit den Verschiebungen des Kopplungsrandes muss sich die räumliche Geometrie des Fluidgebiets ändern, so dass ein Übergang auf eine relative Betrachtungsweise beim Fluid notwendig ist. Während diese in der verwendeten Raum-Zeit-Formulierung enthalten ist, siehe vorherigen Abschnitt 3.3.3, ist es bei einer semidiskreten Formulierung notwendig, die Modellgleichungen anzupassen.

Die zur Lösung gekoppelter Systeme entwickelten Strategien sind in Abschnitt 3.4.1 erläutert. Die Formulierung der Kopplungsbedingungen des hier entwickelten monolithischen Verfahrens ist in Abschnitt 3.4.2 erläutert. In Abschnitt 3.4.3 werden einige Implementierungsdetails der Interface-Elemente diskutiert.

3.4.1 Kopplungsstrategien

Zur Lösung von Aufgaben mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung haben sich partitionierte Lösungsverfahren durchgesetzt. Gekennzeichnet sind diese Verfahren durch das sequenzielle Lösen der eigentlich gekoppelten partiellen Differenzialgleichungen, wobei neben verschiedenen Diskretisierungsverfahren meist auch verschiedene Computerprogramme zur Berechnung von Fluid und Struktur verwendet werden. Demgegenüber stehen die simultanen Verfahren, die wie in dieser Arbeit die Differenzialgleichungen simultan innerhalb eines Programmsystems lösen. Sowohl partitionierte als auch simultane Verfahren werden im Folgenden mit ihren Vor- und Nachteilen näher beschrieben.

Partitionierte Verfahren

Ein herausragender Vorteil partitionierter Verfahren ist die Möglichkeit der Verwendung unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren und Computerprogramme. So können für beide Kontinua an die jeweilige Aufgabenstellung angepasste Modelle und Verfahren genutzt werden, die zum einen besonders effektiv oder genau sind und zum anderen auf Besonderheiten der zu beschreibenden Phänomene, z. B. bei Überschallströmungen, zugeschnitten sind. Zudem können vorhandene Computerprogramme weiter verwendet und in einem gekoppelten Algorithmus zusammengefasst werden.

Partitionierte Verfahren sind im Wesentlichen in drei sequenzielle Schritte unterteilt:

1. Lösung der Fluidgleichungen mit Berechnung der Randspannungen auf dem Kopplungsrand
2. Lösung der Strukturgleichungen mit den Randspannungen des Fluids als zusätzliche äußere Einwirkung
3. Anpassen des Fluidgebiets an die Strukturverformungen

Ein schwach gekoppeltes Lösungsverfahren liegt vor, wenn diese drei Schritte einmal in jedem Zeitschritt durchlaufen werden, wie es in Abbildung 3.34

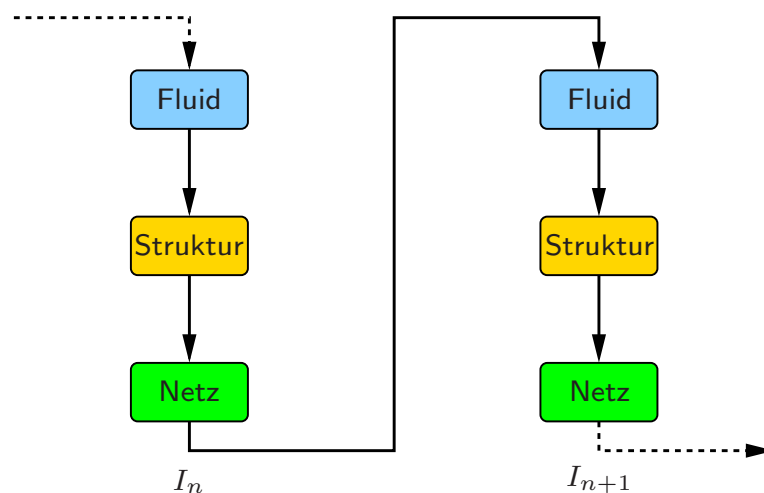


Abbildung 3.34: Partitioniertes Verfahren mit schwacher Kopplung

dargestellt ist. Eine Rückwirkung der Strukturdeformationen findet nicht innerhalb eines Zeitschritts, sondern erst im nachfolgenden Zeitschritt statt. Um mit einem solchen Verfahren brauchbare Lösungen zu erhalten, sind sehr kleine Zeitschritte notwendig. So bleiben innerhalb eines Zeitschritts die

Änderungen der Strukturverschiebungen sehr klein, so dass sich die räumliche Fluidgeometrie nur geringfügig ändert und die Wechselwirkung nahezu linear innerhalb eines Zeitschritts ist. Für Aufgabenstellungen mit starker Wechselwirkung ist diese Vorgehensweise meist ungeeignet.

Werden die drei Lösungsschritte innerhalb eines Zeitschritts mehrfach durchlaufen, siehe Abbildung 3.35, so wird eine stärkere Kopplung erzielt. In der

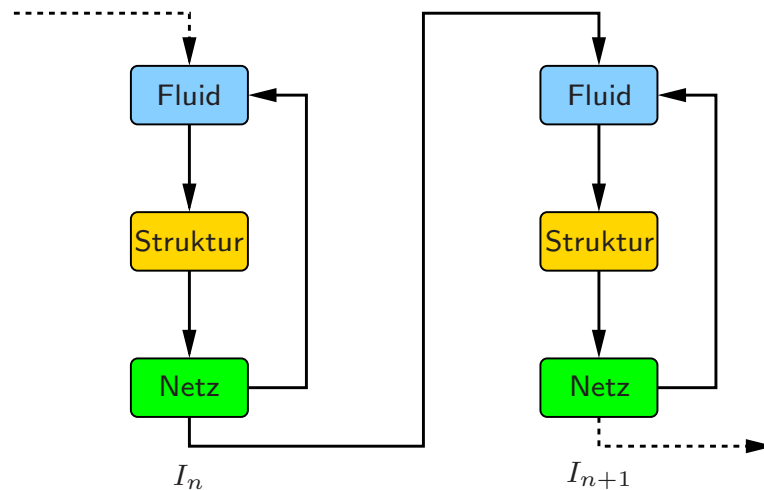


Abbildung 3.35: Partitioniertes Verfahren mit starker Kopplung

Literatur wird diese Vorgehensweise als *starke Kopplung* bezeichnet. Sie wird aber nur dann erreicht, wenn die Iteration so lange durchgeführt wird, bis die nichtlinearen Gleichungen von Fluid und Struktur unter Berücksichtigung des mitbewegten Fluidgebiets vollständig auskonvergiert sind. Als Folge der sequenziellen Berechnung kann das Verfahren bei Systemen mit starker, nichtlinearer Wechselwirkung divergieren. Beim Durchlaufen der drei Berechnungsschritte werden häufig Prädiktor-Korrektor-Verfahren eingesetzt, um die Konvergenz zu beschleunigen und die Stabilität zu erhöhen, siehe z. B. STEINDORF [70].

Simultane Verfahren

Wie oben angedeutet, werden bei den simultanen Verfahren die diskretisierten Modellgleichungen einschließlich ihrer Kopplung simultan gelöst. Der Begriff *Monolithisches Verfahren* wird üblicherweise gleichbedeutend verwendet. In der vorliegenden Arbeit steht der Begriff für ein simultanes Verfahren, welches zudem für alle Modellgleichungen das gleiche Diskretisierungsverfahren verwendet. Demnach wird hier mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode als einheitlichem Diskretisierungsverfahren für Fluid und Struktur ein monolithischer Ansatz entwickelt.

Einem simultanen Verfahren inhärent ist die Realisierung einer starken Kopplung. Innerhalb eines Zeitschritts werden, wie in Abbildung 3.36 darge-

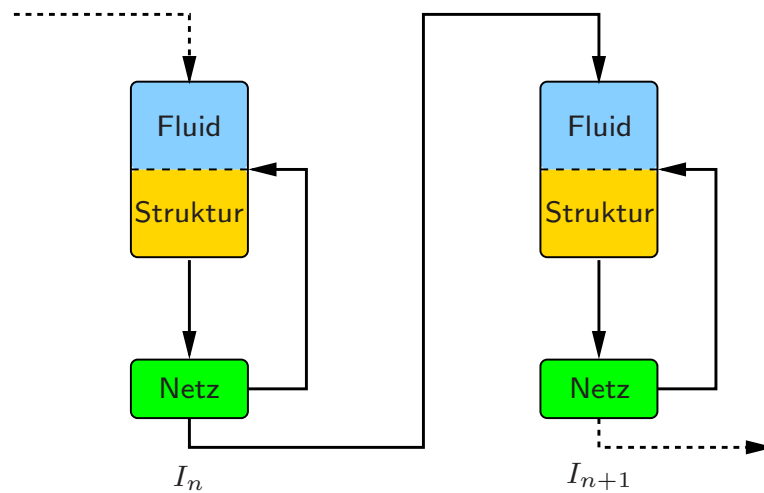


Abbildung 3.36: Simultanes Verfahren

stellt, nur noch zwei Schritte innerhalb der Iteration vollzogen – die Lösung der gekoppelten Gleichungen und die Netzbewegung des Fluids. Demgegenüber ist eine Formulierung in nur einem Schritt nahezu ausgeschlossen, da in diesem Fall die Integration der Modellgleichungen auf einem von der gesuchten Lösung abhängigen Gebiet durchzuführen ist. Da das nichtlineare Gleichungssystem als solches schon iterativ gelöst wird, siehe Abschnitt 3.5, werden die beiden Schritte des Kopplungsverfahrens innerhalb eines Iterationsschritts einmal durchlaufen.

Als Folge des monolithischen Ansatzes ist die Stabilität und Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber dem partitionierten Verfahren wesentlich höher. Als weiteren Vorteil erschließt das Verfahren neue Analyse- und Formulierungsmöglichkeiten, z. B. Eigenwertanalyse des gekoppelten Gesamtsystems oder Anwendung von Reduktionsverfahren basierend auf dem Gesamtsystem. Nachteile des Verfahrens sind die Größe des entstehenden Gleichungssystems und die eingeschränkten Möglichkeiten bei der Wahl anderer, an die jeweilige Aufgabenstellung besser angepasster Lösungsverfahren. Ohne Einsatz eines adaptiven Verfahrens in der Zeit wird zudem die Zeitschrittweite durch die kleinste für Fluid oder Struktur notwendige Zeitschrittweite begrenzt. Dies bereitet hier keine Schwierigkeiten, da die Zeitschrittweite des Fluids maßgebend ist und somit die Strukturdynamik in der Zeit unnötig genau betrachtet wird, der numerische Aufwand hierfür aber vernachlässigbar ist.

3.4.2 Galerkin-Formulierung

Aufgrund der Raum-Zeit-Formulierung der schwachen Formen von Fluid und Struktur ist die Kopplung bereits in den Gleichungen enthalten. So führt das Einbringen der DIRICHLET-Randbedingungen in die Variationsformulierung der Fluidgleichungen in der schwachen Form (3.52) auf die Terme

$$+ \int_{P_n^v} \delta \mathbf{t} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) dP - \int_{P_n^v} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dP . \quad (3.80)$$

Zur Kopplung werden für die eingepprägten Randgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ des Fluids auf dem Kopplungsrand Γ^C die Strukturgeschwindigkeiten \mathbf{v}^S verwendet

$$+ \int_{P_n^C} \delta \mathbf{t} (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) dP - \int_{P_n^C} \delta \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{t} dP , \quad (3.81)$$

so dass die Kopplungsbedingung (2.54) in gewichteter Form erfüllt wird.

Auf der Strukturseite werden die auf die Referenzkonfiguration transformierten Fluidrandspannungen

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\Gamma^C}{d\Gamma_0^C} \mathbf{t} \quad (3.82)$$

als Lastterm

$$- \int_{P_{0,n}^C} \delta \mathbf{v}^S \cdot (-\mathbf{t}_0) dP_0 \quad (3.83)$$

in der schwachen Form berücksichtigt und erfüllen so die Kopplungsbedingung (2.53). Im Gleichungssystem steht der Term auf der linken Seite, da die Randspannungen Freiwerte sind. Das negative Vorzeichen der Randspannungen entsteht durch die auf dem Kopplungsrand entgegengerichteten Normalenvektoren von Fluid und Struktur.

Mit (3.81) und (3.83) wird somit die starke Kopplung in die schwachen Formen eingebracht. Nach Diskretisierung und Integration der Kopplungsterme gehen sie mit

$$\delta \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \hat{\mathbf{v}}^F - \mathbf{B}^T \cdot \hat{\mathbf{v}}^S) - \delta \hat{\mathbf{v}}^F \cdot \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \delta \hat{\mathbf{v}}^S \cdot \mathbf{B}_S \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (3.84)$$

in das gekoppelte Gleichungssystem ein, wie es in Abbildung 3.37 dargestellt ist, wobei die Druckfreiwerte nicht angegeben sind. Die starke Kopplung von Fluid und Struktur wird demnach im Gleichungssystem allein durch die \mathbf{B} -Matrizen erreicht. Durch die Nullmatrix auf der Hauptdiagonalen in der Zeile der Randspannungen $\hat{\mathbf{t}}$ wird die Gleichheit der Geschwindigkeitsfreiwerte von Fluid und Struktur numerisch exakt erfüllt.

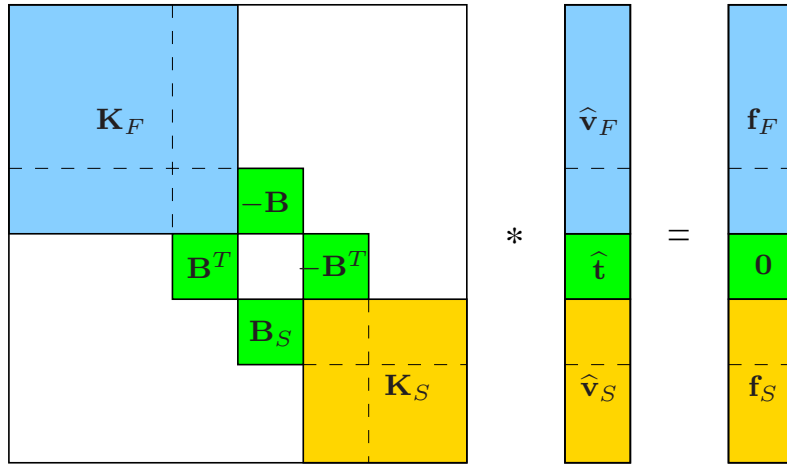


Abbildung 3.37: Gekoppeltes Gleichungssystem

Insgesamt wird eine elegante Umsetzung der Kopplung erreicht, da die Modellgleichungen zur Kopplung nicht zu verändern sind und sie in diskreter Form auf ein gekoppeltes Gesamtgleichungssystem mit starker Kopplung führen. Wesentlich ist hierbei das betrachtete Raum-Zeit-Gebiet, welches auf der Fluidseite allein durch Anpassen der Raum-Zeit-Koordinaten der Strukturdeformation folgen kann, wie es in Abbildung 3.38 skizziert ist. Zudem stehen sämtliche Kopplungsterme auf der linken Seite des Gleichungssystems, so dass sie beispielsweise direkt in Eigenwertanalysen eingehen.

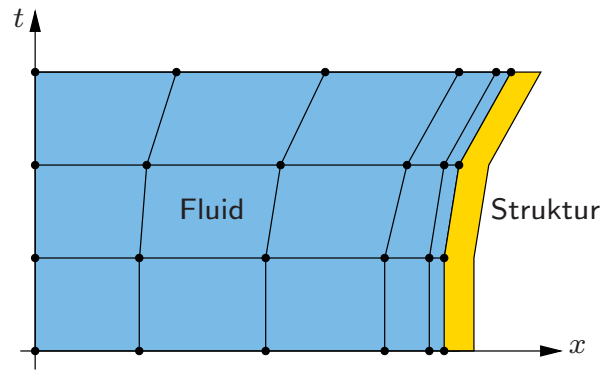


Abbildung 3.38: Gekoppeltes Raum-Zeit-Netz

3.4.3 Interface-Elemente

Bei der Implementierung ist das Vorgehen analog zu den anderen Modellgleichungen und mündet in die im vorigen Abschnitt eingeführten \mathbf{B} -Matrizen. In diesem Abschnitt wird daher nur auf einige Besonderheiten der Implementierung eingegangen.

Fluid-Struktur-Interface

Bei Strömungsberechnungen zeigt sich, dass die Randspannungen durch die zeitdiskontinuierliche GALERKIN-Formulierung Sprünge an den Zeit-Scheibengrenzen aufweisen und es durch die linearen Ansatzfunktionen zu – wenn auch meist kleinen – Oszillationen im Zeitverlauf kommen kann. Da elastische Festkörper eine endliche Wellengeschwindigkeit besitzen, könnte ein derartiger Randspannungsverlauf in der Zeit Wellen in der Struktur hervorrufen. Dieser Effekt kann durch Annahme eines in der Zeit konstanten Verlaufs der transformierten Fluidrandspannungen \mathbf{t}_0 abgemindert werden. Diese Annahme wird bei den Berechnungen der Anwendungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung in Kapitel 4 zugrunde gelegt.

Wie bereits erwähnt, erzeugt die Kopplungsformulierung Nullen auf der Hauptdiagonalen. Diese können bei der Lösung des Gleichungssystems unerwünscht sein, da z. B. eine JACOBI-Skalierung, siehe Abschnitt 3.5.3, nicht mehr möglich ist. Um die Nullen zu verhindern, kann eine GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierung der Randspannungen mit

$$+ \int_{P_n^C} (\delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \delta \mathbf{t}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) dP \quad (3.85)$$

erfolgen. Mit dem zusätzlichen Term ist aber eine numerisch exakte Erfüllung der DIRICHLET-Randbedingung (2.54) nicht mehr gewährleistet. Zudem sind Oszillationen des Druckfeldes mit kleinen Amplituden in der Nähe des Randes zu beobachten. Weiterhin konnte keine Effizienzsteigerung der Gleichungslöser durch die Stabilisierung der Randspannungen festgestellt werden. Deshalb wird sie bei den Beispielberechnungen in dieser Arbeit nicht verwendet.

Bei der Kopplung mit der 2-Feld-Formulierung ist zu beachten, dass auf der Strukturseite sowohl Geschwindigkeiten als auch Verschiebungen als Zustandsgrößen vorhanden sind. In die DIRICHLET-Randbedingung des Fluids (2.54) sind zwar weiterhin die Strukturgeschwindigkeiten einzusetzen, die Änderung des Fluidgebiets wird aber von den Strukturverschiebungen bestimmt. Obwohl die Verschiebungen der Struktur diskontinuierlich in der Zeit sind, sollte für das Fluid ein stetiger Verlauf der Geometrie in der Zeit angenommen werden.

Fluid-Starrkörper-Interface

Die eingeführten Geschwindigkeitsfreiwerte am Rand des Starrkörpers ermöglichen die gleiche Implementierung der DIRICHLET-Randbedingungen

des Fluids wie bei den elastischen Festkörpern. Einzig der Lastterm muss angepasst werden, damit die aus den Randspannungen resultierenden Kräfte und Momente auf den Referenzknoten des Starrkörpers wirken. Die variationellen Geschwindigkeiten $\delta \mathbf{v}$ des Starrkörpers sind mit der Transformationsbeziehung (3.31) durch die variationellen Werte des Referenzknotens $\delta \tilde{\mathbf{v}}^r$ zu ersetzen, so dass für den Lastterm

$$\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{t} = \delta \tilde{\mathbf{v}}^r \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{t} \quad (3.86)$$

folgt.

3.5 Lösungsverfahren

Das durch die Diskretisierung der Modellgleichungen entstandene gekoppelte Gleichungssystem ist in mehrfacher Hinsicht nichtlinear. Bei der Struktur bedarf es der geometrisch nichtlinearen Formulierung zur Beschreibung großer Verschiebungen. Das Fluidmodell ist durch den konvektiven Term in der materiellen Zeitableitung infolge der EULERSchen Betrachtungsweise nichtlinear. Eine weitere Nichtlinearität kommt durch die Abhängigkeit des Integrationsgebiets des Fluids von den Strukturverformungen in das System. Außerdem kann die rechte Seite des Gleichungssystems ebenfalls von der Lösung abhängen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in diesem Abschnitt das zu lösende Gleichungssystem in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (3.87)$$

mit der Systemmatrix \mathbf{A} , dem Lösungsvektor \mathbf{x} und der rechten Seite \mathbf{b} dargestellt.

Eine Bewertung der entwickelten Lösungsstrategie wird anhand der Berechnungen zum wirbelerregten starren Kreiszylinder in Abschnitt 4.1.4 durchgeführt.

3.5.1 Picard-Iteration

Zur numerischen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems gibt es zahlreiche Ansätze, die im Allgemeinen in einen Iterationsalgorithmus münden. In der Strukturmechanik wird das NEWTON-RAPHSON-Verfahren häufig eingesetzt. Es ist in der Nähe der Lösung quadratisch konvergent, bedarf hierzu aber des Gradienten bzw. der Tangente der Matrix \mathbf{A} und ist eingeschränkt durch einen vergleichsweise kleinen Konvergenzradius. Dieses Verfahren wird

hier nicht angewendet, da die konsistente Linearisierung der schwachen Formen und deren numerische Berechnung Schwierigkeiten bereiten und bei Verwendung einer nichtkonsistenten Tangente keine quadratische Konvergenz mehr zu erwarten ist.

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird eine PICARD-Iteration

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_{i-1}) \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{b}(\mathbf{x}_{i-1}) \quad (3.88)$$

eingesetzt, welche keine Tangente benötigt. Der Iterationsalgorithmus wird so lange durchgeführt, bis die Lösung genau genug ist. Hierbei dient als Abbruchkriterium ein geeignetes Fehlermaß, welches bei Iterationsende eine vorgegebene Fehlerschranke ε unterschreitet. Als Fehlermaß kann das relative Residuum

$$\frac{|\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{b}(\mathbf{x}_0)|} = \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{x}_i|}{|\mathbf{b}(\mathbf{x}_0)|} \leq \varepsilon \quad (3.89)$$

oder die relative Änderung des Lösungsvektors

$$\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|}{|\mathbf{x}_i|} \leq \varepsilon \quad (3.90)$$

dienen. Für die numerischen Beispielberechnungen wird – wenn nichts anderes angegeben ist – das relative Residuum mit $\varepsilon = 10^{-4}$ als Fehlerschranke gewählt.

Zur Beschleunigung der Konvergenz eines iterativen Verfahrens ist es von Vorteil, eine gute Startlösung \mathbf{x}_0 zu verwenden. Bei den hier vorliegenden zeitabhängigen Systemen ist dies zunächst die Lösung der letzten Zeit-Scheibe \mathbf{x}_0^0 . Zur Verbesserung des Startvektors werden die einzelnen Komponenten zu allen Zeitpunkten der aktuellen Zeit-Scheibe mit der Lösung am Ende der vorangegangenen Zeit-Scheibe belegt. Für lineare Ansätze in der Zeit führt dies auf $\mathbf{x}_0(t_n^+) = \mathbf{x}(t_n^-)$ und den in der Abbildung 3.39 mit \mathbf{x}_0^1 gekennzeichneten Prädiktor. Die Berücksichtigung der Steigung mit

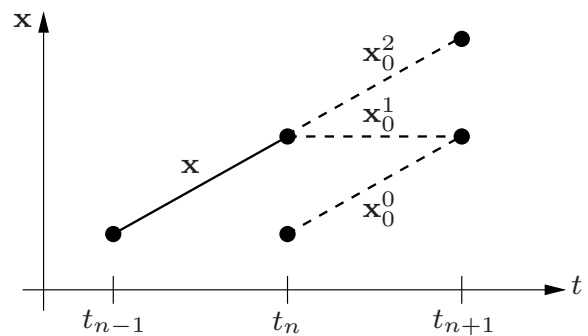


Abbildung 3.39: Prädiktor

$$\mathbf{x}_0^2(t_{n+1}^-) = \mathbf{x}(t_n^-) + \frac{\mathbf{x}(t_n^-) - \mathbf{x}(t_{n-1}^+)}{\Delta t_{n-1}} \Delta t_n \quad (3.91)$$

liefert den Prädiktor \mathbf{x}_0^2 . Zur weiteren Konvergenzbeschleunigung werden mit dem gewählten Prädiktor die erwarteten Verschiebungen des Kopplungsrandes berechnet und dem Fluidgebiet, wie im Abschnitt 3.3.3 beschrieben, eingepreßt. Die Maßnahmen zur Verbesserung des Startvektors führen auf eine Konvergenzsteigerung der PICARD-Iteration um etwa einen Schritt und eine Konvergenzverbesserung der iterativen Gleichungslöser.

Insgesamt zeigt sich, dass der Algorithmus zuverlässig konvergiert und das nichtlineare Gleichungssystem nach drei bis fünf Iterationsschritten löst. Insbesondere bei der Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen erhöht sich die Anzahl der Schritte mit dem hier verwendeten Diskretisierungsverfahren meist nicht. Dies ist ein entscheidender Vorteil der gewählten Formulierung, da bei einer partitionierten Lösung der Modellgleichungen eine wesentlich höhere Anzahl von Iterationsschritten zu erwarten ist [70].

Wie oben dargestellt, bedarf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems in jedem Iterationsschritt der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad . \quad (3.92)$$

Da in diesem Teil der Berechnung der größte numerische Aufwand steckt, sind problemangepasste Lösungsstrategien notwendig, die sich im Wesentlichen in drei Komponenten gliedern lassen: die Speichertechnik der Systemmatrix \mathbf{A} , den eigentlichen Gleichungslöser (Abschnitt 3.5.2) und die Vorkonditionierung (Abschnitt 3.5.3).

Die Ansatzfunktionen einer Zustandsgröße sind jeweils nur auf lokalen Trägern, den adjunkten Elementgebieten eines Knotens, definiert. Dies führt bei der Integration der schwachen Formen auf eine schwach besetzte Systemmatrix, d. h., es sind nur relativ wenige Matrizenkomponenten ungleich null. Zudem sind die Einträge bei sinnvoller Knotenindizierung [13, 66] um die Hauptdiagonale konzentriert. Diese inhärente Eigenschaft der Finite-Element-Methode wird bei der Abspeicherung ausgenutzt, indem für direkte Gleichungslöser nur das Profil und für iterative nur Nichtnullelemente abgespeichert werden.

3.5.2 Gleichungslöser

Die verwendeten Gleichungslöser bauen direkt auf der Speichertechnik auf. Neben der Speicherung im Profil für symmetrische und unsymmetrische Matrizen werden für größere Beispiele schwach besetzte Matrizen verwendet, die nur Nichtnullelemente speichern.

Direkte Gleichungslöser

Für Gleichungssysteme kleiner bis mittlerer Größe (bis ca. $n = 10^4$ Gleichungen) werden Profilmatrizen und direkte Verfahren bevorzugt. Sie berechnen die Lösung nach einer eindeutigen, endlichen Anzahl von Operationen. Die Matrix \mathbf{A} wird dabei nicht invertiert, sondern zerlegt. Für symmetrische Matrizen wird das CHOLESKY-Verfahren, für unsymmetrische das GAUSS-Verfahren verwendet [22]. Vor dem Lösen wird das Gleichungssystem zur Vorkonditionierung nach Abschnitt 3.5.3 skaliert.

Für große Gleichungssysteme eignen sich die direkten Löser nur bedingt, da der Rechen- und Speicheraufwand unverhältnismäßig groß wird. Der numerische Aufwand steigt mit der Ordnung $O(r^2n)$ an, wobei die Bandbreite r bei Netzverfeinerung in der Regel von n abhängig ist.

Bei der Berechnung des mitbewegten Fluidnetzes mit der Pseudo-Struktur wird immer ein direktes Verfahren bevorzugt, da dann die Zerlegung nur einmal durchgeführt werden muss. Damit ist der Berechnungsaufwand für die Zerlegung vernachlässigbar. Gegenüber dem Speicherbedarf des Gesamtgleichungssystems ist zudem der Speicherbedarf mit zwei Freiwerten für jeden räumlichen Fluidknoten und einfacher Zahlengenauigkeit wesentlich geringer.

Methoden der konjugierten Gradienten

Gegenüber den direkten Gleichungslösern haben die iterativen zum Erreichen einer hinreichend genauen Lösung eine wesentlich kleinere Ordnung des numerischen Aufwands bis hin zu einer linearen Abhängigkeit von n . Der Nachteil der iterativen Verfahren liegt in ihrer Abhängigkeit von der jeweiligen Aufgabenstellung, so können sie schlecht konvergieren oder sogar divergieren.

Die Methode der konjugierten Gradienten (engl. conjugate gradients, CG) ist ein klassischer Vertreter der iterativen Verfahren [66]. Sie ist für symmetrische, positiv-definite Matrizen geeignet. Zur Lösung des Gleichungssystems wird eine äquivalente Minimierungsaufgabe gestellt, welche das Minimum des quadratischen Funktionals

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \quad (3.93)$$

bestimmt. Der Gradient der Funktion

$$\nabla F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{b} = \mathbf{r}_i \quad (3.94)$$

im Punkt \mathbf{x}_i wird zur Bestimmung des Relaxationsvektors \mathbf{p}_i genutzt, mit dem die neue Näherung

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{p}_i \quad (3.95)$$

gebildet wird. Theoretisch wird die Lösung spätestens nach n Schritten erreicht, so dass dieses Verfahren auch als direktes Verfahren angesehen werden kann. Es zeigt sich aber, dass die Lösung meist schon nach sehr wenigen Schritten genügend genau ist. Die Methode der konjugierten Gradienten bildet die Basis für viele erweiterte Verfahren wie das verwendete BiCGStab-Verfahren.

BiCGStab-Verfahren

Ein CG-ähnliches Verfahren ist das BiCGStab-Verfahren (engl. biconjugate gradient stabilized) [79]. Es ermöglicht das Lösen von Gleichungssystemen mit unsymmetrischen, indefiniten Matrizen, wie sie bei dem hier verwendeten Diskretisierungsverfahren auftreten. Der Lösungsalgorithmus mit Vorkonditionierungsmatrix \mathbf{M} ist in Abbildung 3.40 dargestellt, siehe BARRET ET AL. [7].

```

 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0$  mit gewähltem Startvektor  $\mathbf{x}_0$ 
Wähle  $\tilde{\mathbf{r}}$  mit  $\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0 \neq 0$ , z. B.  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0$ 
for  $k = 1, 2, \dots$ 
     $\rho_{k-1} = \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{k-1}$ 
    if ( $\rho_{k-1} = 0$ ) Abbruch
    if ( $k = 1$ )  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0$ 
    else
         $\beta_{k-1} = (\rho_{k-1} \alpha_{k-1}) / (\rho_{k-2} \omega_{k-1})$ 
         $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta_{k-1} (\mathbf{p}_{k-1} - \omega_{k-1} \mathbf{x}_{k-1})$ 
    endif
    Löse  $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_k$ 
     $\mathbf{v}_k = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 
     $\alpha_k = (\rho_{k-1}) / (\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_k)$ 
     $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{v}_k$ 
    if ( $|\mathbf{s}| \leq \varepsilon$ )  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \hat{\mathbf{p}}$  Lösung gefunden
    Löse  $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ 
     $\mathbf{t} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ 
     $\omega_k = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) / |\mathbf{t}|$ 
     $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \hat{\mathbf{p}} + \omega_k \hat{\mathbf{s}}$ 
     $\mathbf{r}_k = \mathbf{s} - \omega_k \mathbf{t}$ 
    if ( $|\mathbf{r}| \leq \varepsilon$ ) Lösung gefunden
    if ( $\omega_k = 0$ ) Abbruch
end

```

Abbildung 3.40: Vorkonditionierter BiCGStab-Gleichungslöser

Das Verfahren zeichnet sich durch ein gleichmäßiges Konvergenzverhalten aus und benötigt nicht die Transponierte der Matrix \mathbf{A} . Die Iteration bricht ab, wenn $\alpha \approx 0$ oder $\omega \approx 0$ ist, so dass die Lösung nicht weiter konvergiert. Dies muss aber nicht zum Abbruch der ganzen Berechnung führen, da im Rahmen der PICARD-Iteration das lineare Gleichungssystem neu aufgebaut wird und der Gleichungslöser mit einem neuen Residuum startet.

Der numerische Aufwand beim Durchlaufen eines Iterationsschritts wird – abgesehen vom Vorkonditionierer – von den beiden Matrix-Vektor-Produkten dominiert, so dass bei der Implementierung des Produkts die Effizienz im Vordergrund stehen sollte. Zudem steigt der Aufwand beim Durchlaufen eines Schritts nur mit der Ordnung $O(n)$ an. Der Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems ist demnach nur durch die Wahl der Vorkonditionierung (Abschnitt 3.5.3) und der Bereitstellung eines guten Startvektors beeinflussbar. Die Güte des Startvektors ist bei instationären Aufgabenstellungen direkt abhängig von der Zeitschrittweite. Es zeigt sich, dass bei Verringerung der Zeitschrittweite, z. B. 100 anstelle von 50 Zeitschritten je Periode, häufig eine Reduzierung der gesamten Berechnungszeit für eine Periode zu erreichen ist.

Neben dem BiCGStab-Löser wird in der Literatur der GMRES-Löser empfohlen, z. B. [71]. Er wird hier nicht bevorzugt, da die Implementierung und Steuerung aufwändiger und die Abhängigkeit von der jeweiligen Aufgabenstellung größer ist.

3.5.3 Vorkonditionierung

Zu den wichtigsten Komponenten eines iterativen Verfahrens zählt die Vorkonditionierung. An zwei Stellen, vor und während der iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems, findet sie hier Anwendung. Ziel einer Vorkonditionierung ist es, die Konvergenzgeschwindigkeit des iterativen Gleichungslösers zu erhöhen, was meist gleichbedeutend ist mit einer Verkleinerung der Konditionszahl

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1 \quad (3.96)$$

der Systemmatrix \mathbf{A} , vgl. [50].

Zur Vorkonditionierung wird beispielsweise das Gleichungssystem von links mit der Vorkonditionierungsmatrix \mathbf{M} multipliziert, wobei es optimal ist, wenn \mathbf{M} im entstehenden Gleichungssystem

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{b} \quad (3.97)$$

die Inverse von \mathbf{A} und somit $\text{cond}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = 1$ ist. Die Bereitstellung der Inversen kommt aber einer direkten Lösung gleich; Ziel ist es daher, eine möglichst gute Approximation der Inversen bereitzustellen, die zudem mit geringem Aufwand berechnet werden kann.

Eine Vorkonditionierung während der iterativen Lösung führt auf das eigenständige Gleichungssystem

$$\mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} \quad , \quad (3.98)$$

wie es auch an zwei Stellen beim vorkonditionierten BiCGStab-Verfahren, siehe Abbildung 3.40, eingesetzt wird.

Bevor drei Vorkonditionierungsverfahren diskutiert werden, wird nachfolgend auf die Skalierung eingegangen, die vor der iterativen Lösung als Vorkonditionierung eingesetzt wird.

Skalierung

Die Diskretisierung führt, u. a. aufgrund der verschiedenen zugrunde liegenden schwachen Formen und der Formulierung mit dimensionsbehafteten Zustandsgrößen, auf ein Gleichungssystem, dessen Komponenten von z. T. sehr unterschiedlicher Größenordnung sind. Zum Lösen ist eine Skalierung auf Werte ähnlicher Größenordnung sinnvoll und teilweise auch notwendig.

Die Diagonalmatrix \mathbf{D} mit den Komponenten

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (3.99)$$

skaliert das Gleichungssystem durch

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} \quad (3.100)$$

derart, dass die Hauptdiagonalelemente der entstehenden Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ den Wert eins annehmen. Diese Art der Skalierung wird auch als *Jacobi-Vorkonditionierung* bezeichnet.

Bei der Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen entstehen durch die Kopplungsformulierung Nullen auf der Hauptdiagonalen, so dass \mathbf{D} nicht mehr regulär ist. In diesem Fall skaliert die Diagonalmatrix \mathbf{D} mit

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_k |A_{ik}|} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (3.101)$$

die Zeilensummennormen der Systemmatrix durch

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} \quad (3.102)$$

auf den Wert eins.

SOR-Vorkonditionierer

Für Gleichungssysteme ohne Nullelemente auf der Hauptdiagonalen bietet sich das Verfahren der Überrelaxation (engl. successive overrelaxation, SOR) an. Es baut direkt auf der Matrix \mathbf{A} auf und benötigt für die Vorkonditionierungsmatrix \mathbf{M} keinen weiteren Speicher. Aus der additiven Zerlegung von \mathbf{A} in eine untere Dreiecksmatrix \mathbf{L} , eine Diagonalmatrix \mathbf{D} und eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{U}

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \quad (3.103)$$

folgt die Vorkonditionierungsmatrix

$$\mathbf{M}(\omega) = \frac{1}{\omega(2 - \omega)} (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \omega \mathbf{U}) \quad (3.104)$$

als Funktion des Relaxationsfaktors ω . Wenn kein günstigerer Wert bekannt ist, wird für den Relaxationsfaktor $\omega = 1$ gewählt, was zusammen mit einer JACOBI-Skalierung auf

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} + \mathbf{L})(\mathbf{I} + \mathbf{U}) \quad (3.105)$$

führt. Der numerische Aufwand zum Lösen des Gleichungssystems ist von der Ordnung $O(rn)$. Wesentliches Argument zur Verwendung des Verfahrens ist der sehr geringe Speicherbedarf. Die Effektivität hingegen ist erst bei guten Startlösungen befriedigend.

Eine Anwendung bei Aufgabenstellungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung führt – durch die Nullelemente auf der Hauptdiagonalen – auf ein divergentes Lösungsverhalten.

ILU-Vorkonditionierer

Die unvollständige LU-Zerlegung (engl. incomplete lower-upper, ILU) ist wie das SOR-Verfahren ebenfalls ein weit verbreiteter Vorkonditionierer [50]. Er benötigt zur Initialisierung von \mathbf{M} die gleiche Speichermenge wie die schwach besetzte Matrix \mathbf{A} selbst. Entwickelt wird \mathbf{M} aus einer LU-Zerlegung von \mathbf{A}

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \quad , \quad (3.106)$$

ohne dabei Nullelemente aufzufüllen. Bei Berechnungen von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen zeigt sich eine schlechte Effektivität des Verfahrens, so dass dieses Verfahren nicht verwendet wird, wobei ein teilweises Auffüllen der Nichtnullelemente (engl. fill-in) bei der Zerlegung die Effektivität eventuell verbessern könnte.

Direkte Vorkonditionierer

Aufgrund der unbefriedigenden Effektivität der SOR- und ILU-Vorkonditionierung wird bei den Anwendungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung in Kapitel 4 ein direkter Gleichungslöser zur Vorkonditionierung verwendet. Hierbei wird die Vorkonditionierungsmatrix \mathbf{M} als Profilmatrix eingeführt und mit den Komponenten der schwach besetzten Matrix \mathbf{A} belegt. Im Gegensatz zum ILU wird eine vollständige Zerlegung vorgenommen. Damit wird das Gleichungssystem durch den Vorkonditionierer direkt gelöst und der iterative Löser benötigt genau einen Iterationsschritt. Der numerische Aufwand zur Lösung des linearen Gleichungssystems ist entsprechend hoch. Er sinkt aber signifikant, wenn die zerlegte Matrix in weiteren Schritten der PICARD-Iteration und in weiteren Zeitschritten als Vorkonditionierer genutzt wird.

Bei einmaliger Zerlegung zu Beginn eines Zeitschritts wird zur Berechnung des gesamten Zeitschritts etwa die Zeit zur Zerlegung benötigt, d. h. bei drei bis fünf Iterationsschritten der PICARD-Iteration sinkt der Berechnungsaufwand um den Faktor drei bis fünf, da der direkte Vorkonditionierer nur einmal die Systemmatrix zerlegt und der BiCGStab-Gleichungslöser jeweils nur sehr wenige Schritte benötigt. Wird die zerlegte Matrix für weitere Zeitschritte verwendet, sinkt die Vorkonditionierungsqualität im zeitlichen Verlauf in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung.

Vor Beginn einer Berechnung ist es schwierig, die Anzahl der Schritte n_z festzulegen, nach der eine erneute Zerlegung sinnvoll ist. Die Festlegung erfolgt durch eine anhand von Anwendungsbeispielen heuristisch motivierte adaptive Steuerung, die jedoch nicht allgemein anwendbar ist. Sie ist in Abbildung 3.41 schematisch wiedergegeben. In der Abbildung steht t_m für die mittlere Rechenzeit zur Lösung eines linearen Schritts

$$t_m = \frac{\text{Rechenzeit für eine Zeit-Scheibe}}{\text{Anzahl linearer Schritte}} \quad (3.107)$$

und t_z für die Zeit, die zur Zerlegung der Matrix \mathbf{A} erforderlich ist.

Zur Reduzierung des hohen Speicherbedarfs ist die Zahlengenauigkeit der Vorkonditionierungsmatrix auf einfache Genauigkeit reduziert, so dass der

| | |
|-----------------------------------|------------------|
| | $n_z = n_z + 1$ |
| if ($t_m \leq 0.15 t_z$) | $n_z = n_z + 1$ |
| if ($t_m \geq 0.40 t_z$) | $n_z = n_z - 3$ |
| if ($t_m \geq 1.00 t_z$) | $n_z = n_z / 4$ |
| if ($t_m \geq 2.00 t_z$) | $n_z = n_z / 10$ |
| if ($n_z > 400$) | $n_z = 400$ |
| if ($n_z < 1$) | $n_z = 1$ |

Abbildung 3.41: Adaptive Schrittweitensteuerung der Zerlegung

Speicherbedarf in der Regel halbiert wird. Um den numerischen Fehler in der Größenordnung der Zahlengenauigkeit zu halten, werden die numerischen Operationen bei der Zerlegung mit doppelter Genauigkeit durchgeführt.

Die direkte Vorkonditionierung zeigt insgesamt eine hohe Effektivität, wobei die Einsatzfähigkeit durch den Speicherbedarf begrenzt ist. Besonders hoch ist die Effektivität in Bereichen mit nahezu periodisch-stationären Lösungen und einem geringeren Einfluss der Nichtlinearität; dort kann eine einzige Zerlegung ausreichend sein.

4 Anwendungsbeispiele

Ein Ziel numerischer Berechnungsmethoden ist, Näherungslösungen der betrachteten Modellgleichungen zu bestimmen. Die Überprüfung dieses Ziels wird mit dem Begriff *Verifikation* bezeichnet. Gefordert wird dabei, dass die numerische Lösung bei feiner werdender Diskretisierung gegen die analytische Lösung der Modellgleichungen konvergiert. Da die analytische Lösung meist unbekannt ist, kann die Überprüfung nur an einfachen Systemen, wie sie z. B. in Kapitel 3 verwendet werden, stattfinden. Für komplexere Systeme erfolgt ein Vergleich mit Lösungen anderer numerischer Verfahren oder anderer Autoren.

Wesentliches Ziel einer Berechnung ist aber die Simulation in der Natur vorkommender Phänomene. Ist die Verifikation erfolgreich, bleibt die Aufgabe, zu überprüfen, ob das mathematische Modell die gewünschten physikalischen Phänomene widerspiegelt. Dies wird mit dem Begriff *Validierung* bezeichnet.

In der Numerik kann die Verifikation unabhängig von der Validierung erfolgen. Die Validierung hängt aber bei numerischen Simulationen praxisorientierter Aufgabenstellungen von der Genauigkeit der Näherungslösung und somit von der Verifikation ab. Beispielsweise können die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen turbulente Strömungen beschreiben, eine direkte numerische Simulation in der Natur vorkommender turbulenter Strömungen ist jedoch aufgrund des numerischen Aufwands ohne Erweiterung des Modells nahezu ausgeschlossen.

Die in dieser Arbeit betrachteten Aufgabenstellungen richten sich nach diesen beiden Zielen. Während in Kapitel 3 im Wesentlichen die Verifikation an nicht gekoppelten Systemen im Vordergrund steht, soll in diesem Kapitel der Validierung des Modells und der Analyse gekoppelter Systeme mehr Beachtung zukommen. Im ersten Beispiel in Abschnitt 4.1 werden als Phänomene die VON KÁRMÁNSche Wirbelstraße und das Lock-in-Phänomen einer Strömung um einen starren Kreiszylinder untersucht. Im zweiten Beispiel in Abschnitt 4.2 wird eine wirbelerregte elastische Platte untersucht.

4.1 Wirbelerregter starrer Kreiszylinder

4.1.1 Phänomene

Seit Beginn numerischer und experimenteller Untersuchungen von Strömungen werden umströmte starre Körper [62] betrachtet. Im laminaren Bereich lassen sich zwei Phänomene – die VON KÁRMÁNsche Wirbelstraße und das Lock-in-Phänomen – erkennen. Wie in Abschnitt 3.3 erläutert, entsteht bei der Wirbelstraße im Nachlauf eines Körpers eine gleichmäßige Anordnung von Wirbeln, die mit der Strömung transportiert werden. Für den in diesem Beispiel verwendeten Kreiszylinder liegen zahlreiche experimentelle und numerische Untersuchungen vor. In der Natur kann die VON KÁRMÁNsche Wirbelstraße z. B. im Nachlauf von Flussbrückenpfeilern beobachtet werden, oder, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, im Nachlauf einer Insel im Wolkenfeld.

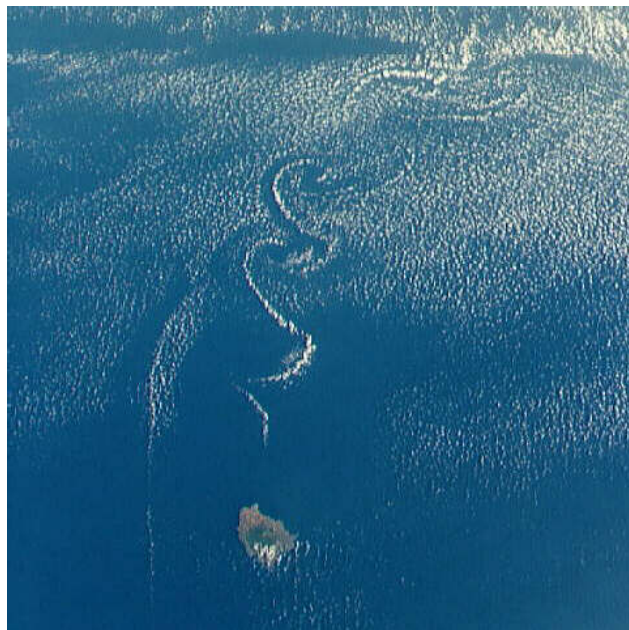


Abbildung 4.1: Wirbelstraße, Socorro Island, Mexiko [54]

Ist der Starrkörper elastisch gelagert, wird der Körper durch die sich ablösen- den Wirbel zu Oszillationen orthogonal zur Strömungsrichtung angeregt. Liegt die Ablösefrequenz der Wirbel in der Nähe der Eigenfrequenz des Ein-Masse-Schwingers, so kommt es nicht nur zur Resonanz und damit zu großen Verschiebungsamplituden des Starrkörpers, sondern auch zur Synchronisation der Ablösefrequenz mit der Schwingungsfrequenz des Starrkörpers. Dieses Phänomen wird als *Lock-in* bezeichnet.

4.1.2 Unverschieblicher Kreiszylinder

Das System zur Untersuchung des unverschieblichen Kreiszylinders mit dem Durchmesser $L_o = 0.16 \text{ cm}$ ist in Abbildung 4.2 dargestellt. In Anlehnung

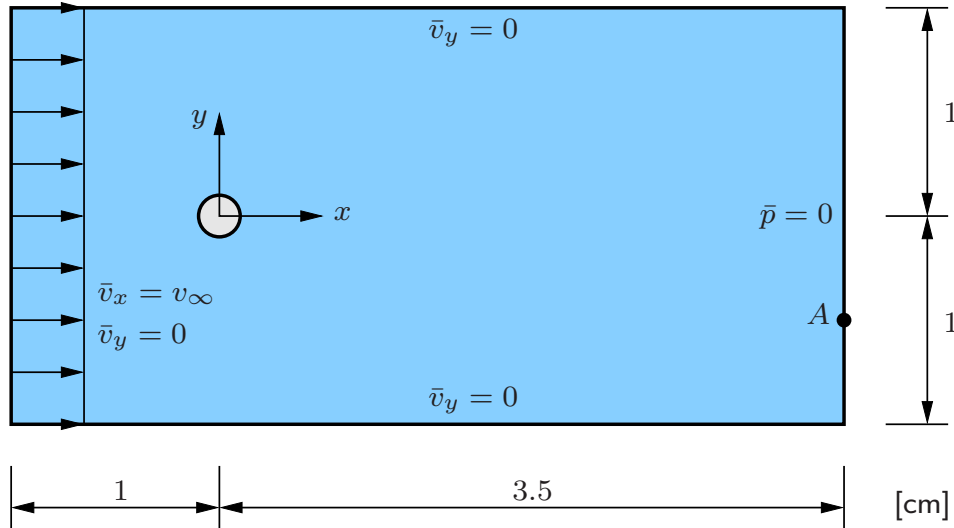


Abbildung 4.2: Umströmter starrer Kreiszylinder

an die experimentellen Untersuchungen von ANAGNOSTOPOULOS & BEARMAN [4] und an verschiedene numerische Untersuchungen zu dem elastisch gelagerten Kreiszylinder aus Abschnitt 4.1.3 wird die Dichte des Fluids zu $\rho = 0.9982 \text{ g/cm}^3$ und die dynamische Zähigkeit zu $\mu = 0.01002 \text{ g/s/cm}$ gewählt. Die Materialparameter des Fluids entsprechen damit denen von Wasser bei einer Temperatur von 20°C .

Um die numerischen Berechnungen mit dynamisch ähnlichen Strömungen vergleichen zu können, wird die Einströmgeschwindigkeit v_∞ in Abhängigkeit der REYNOLDS-Zahl zu

$$v_\infty = \frac{\nu \cdot \text{Re}}{L_o} = 0.0627 \cdot \text{Re} \quad (4.1)$$

gewählt.

Die numerischen Berechnungen erfolgen mit drei verschiedenen Finite-Element-Netzen. Die dargestellten Ergebnisse basieren im Wesentlichen auf dem mittleren Netz (Netz II), siehe Abbildung 4.3. Es beinhaltet 5 591 Elemente (mit Starrkörperelement) und 5 139 Knoten, und das Gleichungssystem umfasst 30 988 Gleichungen. Das gröbere Netz (Netz I) führt auf ca. 18 000 und das feinere Netz (Netz III) auf ca. 61 000 Gleichungen. Die Berechnung erfolgt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ und somit etwa 130

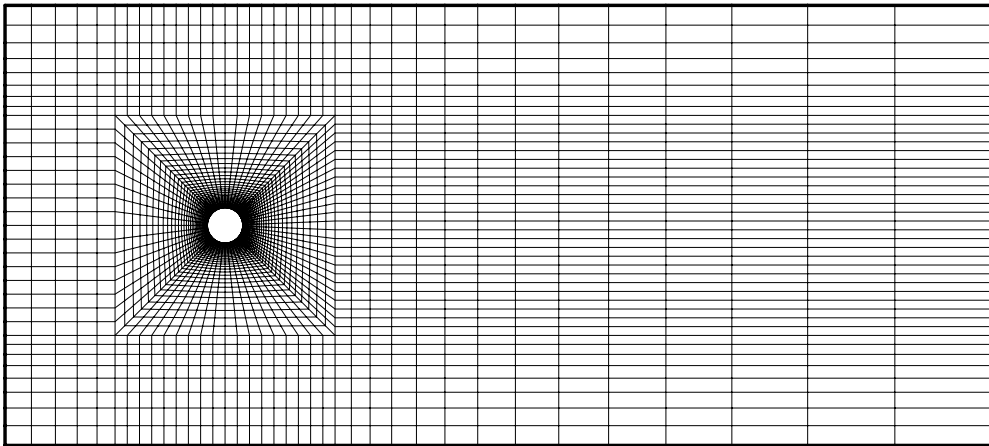


Abbildung 4.3: Mittlere Diskretisierung (Netz II)

Zeitschritten je Periode bei einer REYNOLDS-Zahl von $Re = 110$. Während der Anfangsausbildung der Wirbelstraße werden bis zum Zeitpunkt $t = 2\text{ s}$ größere Zeitschrittweiten verwendet. Zudem wird die Strömung durch eine erhöhte Einströmgeschwindigkeit an einem einzelnen Knoten zu Beginn der Berechnung leicht gestört, so dass die Anströmung leicht unsymmetrisch ist, um eine schnellere Ausbildung der Wirbelstraße zu erreichen.

Das System wird mit Netz II für eine REYNOLDS-Zahl von $Re = 110$ näher untersucht. Abbildung 4.4 zeigt in einer Abfolge von jeweils drei Abbildungen das Geschwindigkeits- und Druckfeld in der Nähe des Zylinders für annähernd eine halbe Periode. Zu erkennen sind die wechselseitig oben und

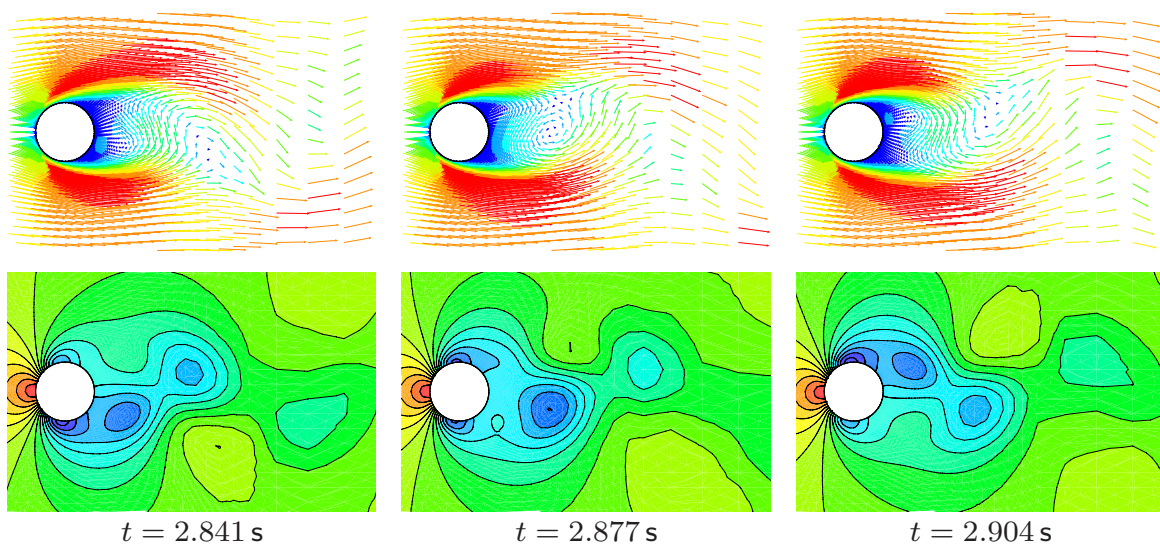


Abbildung 4.4: Geschwindigkeits- und Druckfelder für eine halbe Periode

unten vom Zylinder abgelösten Wirbel, die mit der Strömung transportiert werden und eine VON KÁRMÁNSche Wirbelstraße bilden. Mit der zum Ausfluss hin größer werdenden Elementierung wird die Wirbelstraße nicht mehr ganz so gut aufgelöst, dies hat jedoch keinen wesentlichen Einfluss auf die berechneten Werte am Zylinder. Im Druckverlauf sind die Wirbel durch lokale, räumlich kreisförmige Minima zu erkennen.

In Abbildung 4.5 ist der Zeitverlauf der Vertikalgeschwindigkeit in Punkt A

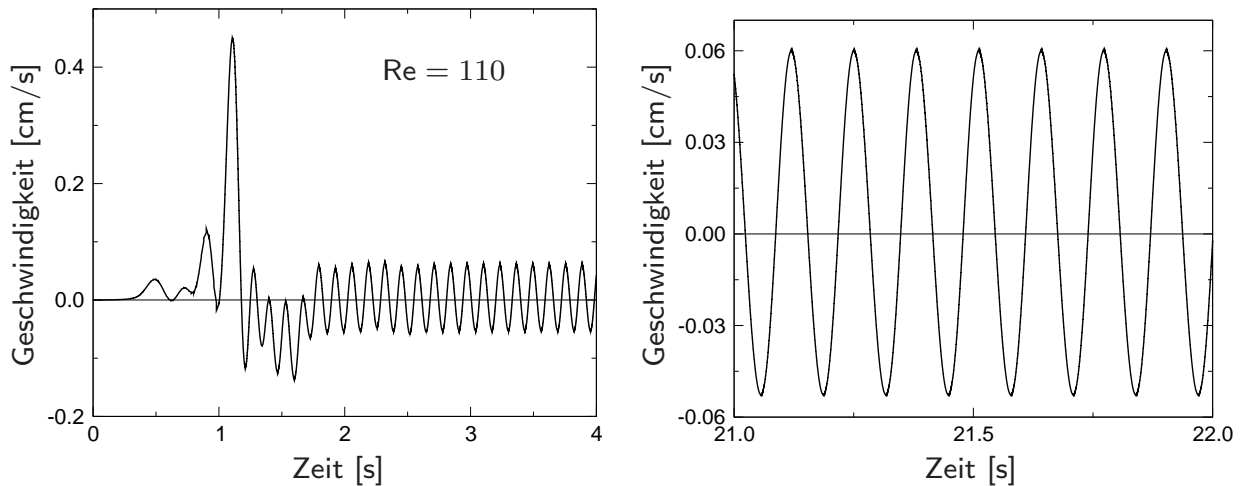


Abbildung 4.5: Vertikalgeschwindigkeit in Punkt A

mit $\mathbf{x}_A = [3.5, -0.5]$ dargestellt. Eine FOURIER-Transformation liefert für den periodisch-stationären Bereich das in Abbildung 4.6 dargestellte Frequenzspektrum. Es ist nur eine dominante Frequenz, die Ablösefrequenz mit $f_F = 7.64$ Hz, zu erkennen.

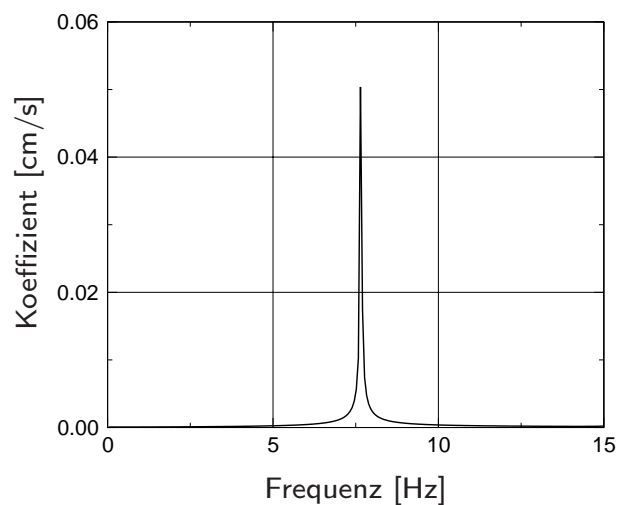


Abbildung 4.6: Frequenzspektrum der Vertikalgeschwindigkeit

Die periodisch ablösenden Wirbel erzeugen oszillierende Kräfte, die auf den Starrkörper wirken. Für Ähnlichkeitsbetrachtungen werden sie in dimensionslose Beiwerte überführt. Auf eine Einheitsstiefe bezogen folgen sie mit der angreifenden Kraft F bzw. dem angreifenden Moment M , dem Staudruck

$$q = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \quad (4.2)$$

und dem Durchmesser als charakteristisches Längenmaß zu

$$c = \frac{F}{q \cdot L_o} \quad . \quad (4.3)$$

In Abbildung 4.7 (links) ist der Auftriebsbeiwert c_L dargestellt. Während

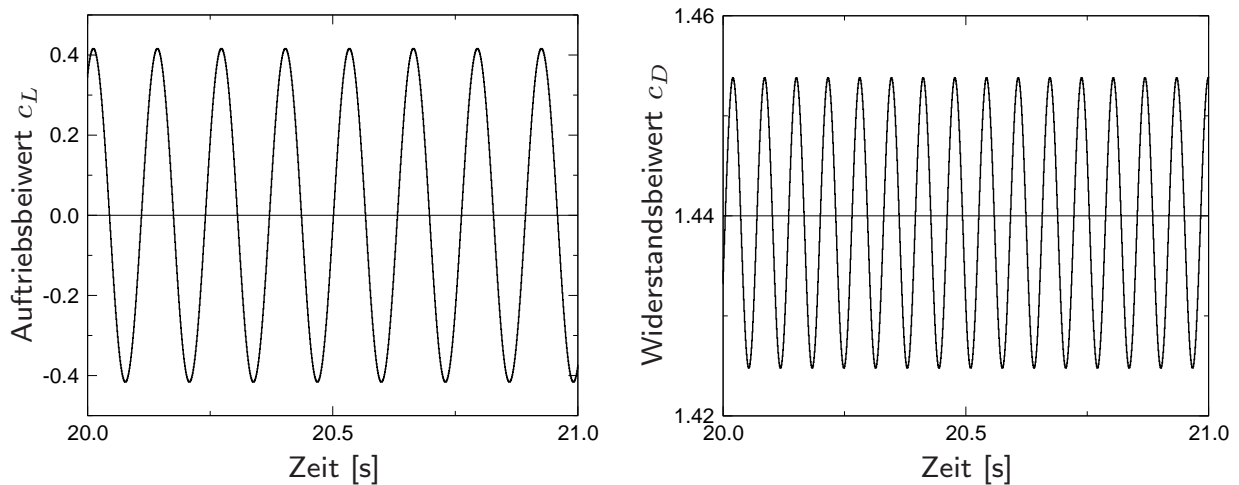


Abbildung 4.7: Auftriebs- und Widerstandsbeiwert c_L und c_D

dieser mit der Frequenz der Wirbelablösung um den Nullpunkt oszilliert, hat der Widerstandsbeiwert c_D die doppelte Frequenz, siehe Abbildung 4.7 (rechts). Zudem wird er wesentlich mehr durch den Staudruck als durch die Wirbel geprägt, so dass er sich um den Wert 1.439 bewegt.

Die unsymmetrisch angreifenden Randschubspannungen des Fluids belasten den Starrkörper zusätzlich mit einem resultierenden Moment. Der Momentenbeiwert oszilliert mit der Ablösefrequenz um den Nullpunkt, siehe Abbildung 4.8. Im Anfangsbereich wird zwischen den Zeitpunkten $t = 0.1$ s und $t = 1.0$ s trotz der relativ groben Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.02$ s – etwa sieben Zeitschritten je Periode – die Ausbildung der Wirbelstraße gut erfasst.

Für weitere REYNOLDS-Zahlen zwischen 90 und 130 sind die Ablösefrequenzen in Abbildung 4.9 eingetragen. Als Vergleichswerte dienen die Frequenzen

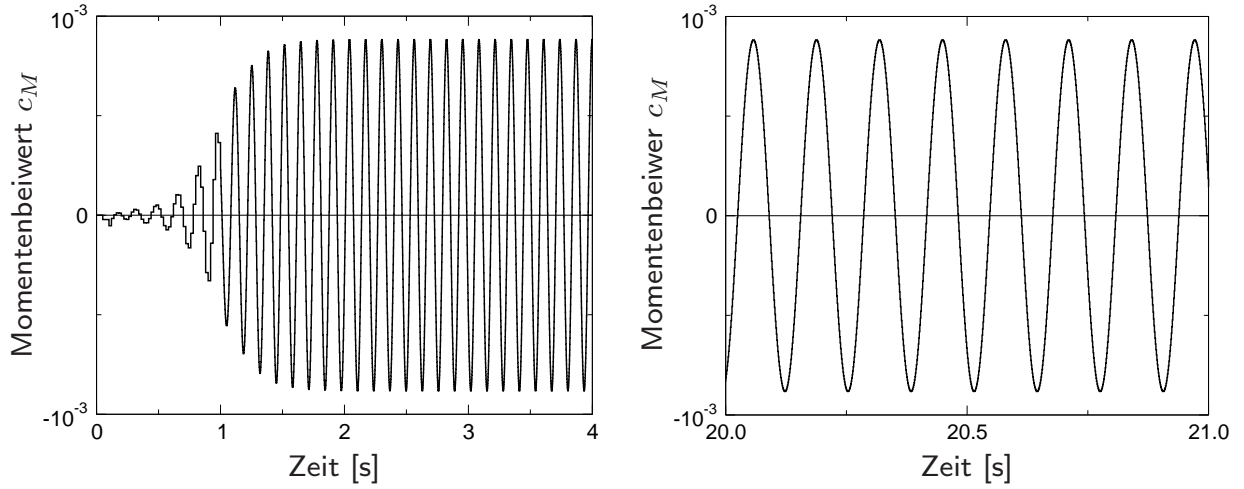


Abbildung 4.8: Momentenbeiwert c_M

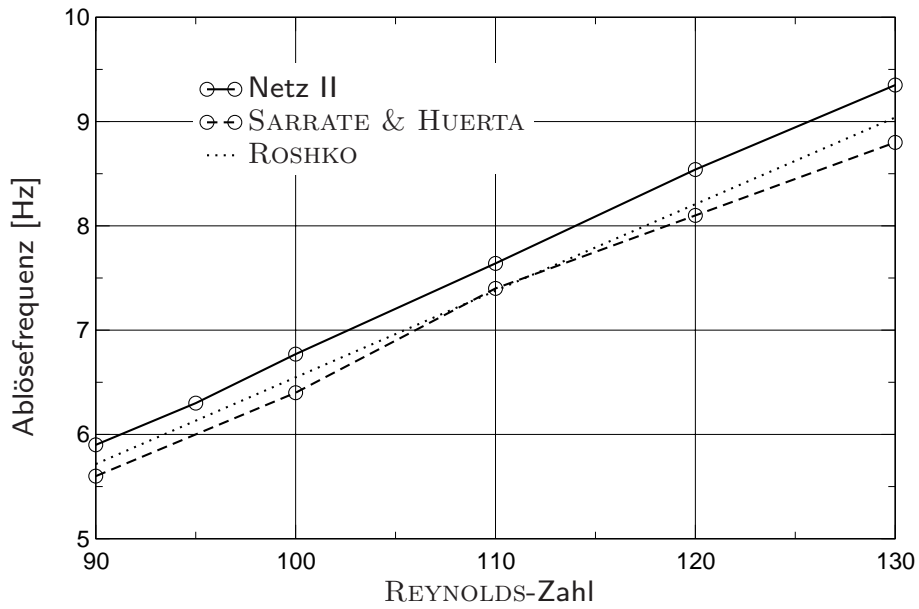


Abbildung 4.9: Ablösefrequenz in Abhängigkeit der REYNOLDS-Zahl

aus der von ROSHKO [61] empirisch ermittelten STROUHAL-Zahl

$$St = 0.212 \cdot \left(1 - \frac{21.2}{Re}\right) \quad (4.4)$$

und die numerisch berechneten Frequenzen von SARRATE & HUERTA [63]. Die hier berechneten Ablösefrequenzen sind etwas größer als die von SARRATE & HUERTA, welche etwas um den Verlauf von ROSHKO schwanken. In Konvergenzuntersuchungen zeigt sich, dass bei größerer Diskretisierung

(Netz I) die Ablösefrequenzen sinken und mit den Werten von SARRATE & HUERTA übereinstimmen. Bei Netzverfeinerung (Netz III) sind die Frequenzen etwas höher, z. B. ändert sich bei einer REYNOLDS-Zahl von 130 die Ablösefrequenz von 9.35 Hz auf 9.5 Hz. Da die Änderung zum feineren Netz hin relativ gering ist und diese das Systemverhalten nicht maßgeblich beeinflusst, wird für die weiteren Betrachtungen das mittlere Netz verwendet. Zudem sind die Untersuchungen beim elastisch gelagerten Kreiszylinder in Abschnitt 4.1.3 schon mit der mittleren Diskretisierung (Netz II) numerisch sehr aufwändig.

4.1.3 Elastisch gelagerter Kreiszylinder

In diesem Abschnitt wird der starre Kreiszylinder nicht mehr fest, sondern elastisch gelagert, wie es in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Während hori-

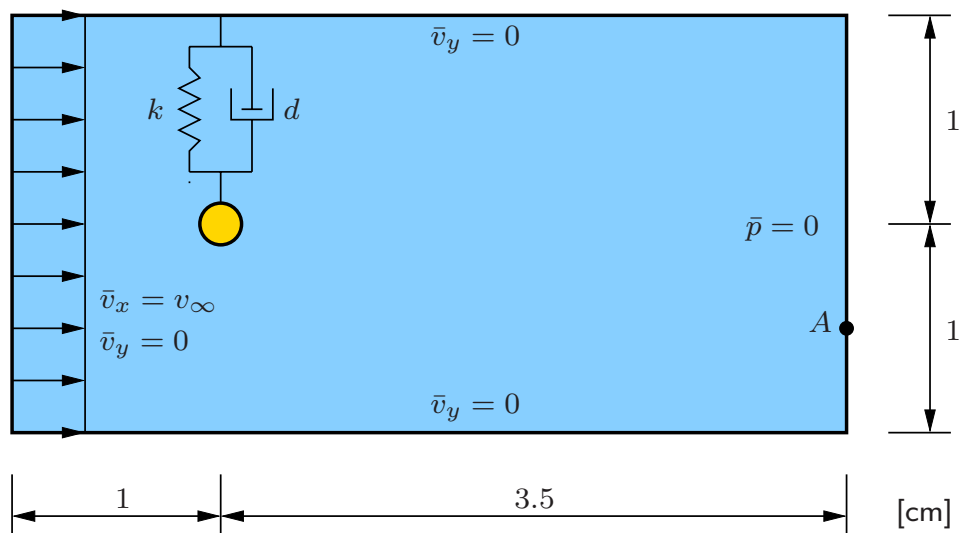


Abbildung 4.10: Umströmter elastisch gelagerter starrer Kreiszylinder

zontale und rotatorische Bewegungen ausgeschlossen sind, kann der Kreiszylinder, gelagert durch das Feder-Dämpferelement, vertikale Schwingungen vollziehen. Untersucht wird der Einfluss dieser Schwingungen auf das gesamte Systemverhalten.

Die Systemwerte stimmen mit den Werten des unverschieblichen Systems überein. Hinzu kommt die Federsteifigkeit mit $5.79 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm}$, die Dämpfung mit $d = 0.0325 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/cm}$ und die Masse des Zylinders mit $m = 2.979 \text{ g}$. Sie sind, wie oben schon erwähnt, in Anlehnung an die experimentellen Untersuchungen von ANAGNOSTOPOULOS & BEARMAN [4] gewählt.

Freie Zylinderschwingung

Ohne den Einfluss der Strömung kann der Zylinder als ein Ein-Masse-Schwinger analytisch untersucht werden. Der Körper vollzieht ohne äußere Kraft eine freie Schwingung, die durch die homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$m \ddot{u}(t) + d \dot{u}(t) + k u(t) = 0 \quad (4.5)$$

und die entsprechenden Anfangsbedingungen, $u(t_0) = u_0$ und $\dot{u}(t_0) = \dot{u}_0$, beschrieben wird. Die Zustandsgröße u charakterisiert hierbei die Vertikalverschiebung. Das ungedämpfte System, hier mit dem Index 0 gekennzeichnet, hat eine Eigenkreisfrequenz von

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 44.09 \frac{1}{s} \quad (4.6)$$

und folglich eine Eigenfrequenz von

$$f_0^S = \frac{\omega}{2\pi} = 7.017 \text{ Hz} \quad (4.7)$$

sowie eine Periodendauer von

$$T_0^S = \frac{1}{f_0^S} = 0.1425 \text{ s} . \quad (4.8)$$

Die Dämpfung ist in den numerischen Berechnungen berücksichtigt. Der Einfluss auf die Antwort des Systems ist aber aufgrund des sehr kleinen LEHRschen Dämpfungsmaßes

$$D = \frac{d}{2\sqrt{k m}} = 3.9 \cdot 10^{-6} \ll 1 \quad (4.9)$$

zu vernachlässigen [55]. Zudem wird neben dieser physikalischen Dämpfung numerische Dämpfung durch das Zeitintegrationsverfahren in das System eingebracht. Im Weiteren wird daher auf den Index 0 zur Kennzeichnung des ungedämpften Systems verzichtet.

Gekoppeltes System ohne Auslenkung

Die Berechnung des gekoppelten Systems erfolgt zunächst mit einem nur durch die Fluidrandspannungen belasteten Kreiszyylinder, d. h., er wird nicht durch eine zusätzliche äußere Last belastet. Dieses System wurde in der

Literatur u. a. von NOMURA [57, 58], YOUNG & CHANG [82] und SARRATE & HUERTA [63] numerisch und von ANAGNOSTOPOULOS & BEARMAN [4] experimentell untersucht.

Die Eigenfrequenz des Ein-Masse-Schwingers ist mit $f^S = 7.017 \text{ Hz}$ in dem Ablösefrequenzbereich, der bei dem untersuchten REYNOLDS-Zahlenbereich von 90 bis 130 beobachtet wird. In Abschnitt 4.1.2 wird für $\text{Re} = 104.4$ eine Ablösefrequenz von $f^F = 7.02 \text{ Hz}$ ermittelt. Die Strömung regt den Zylinder bei dieser REYNOLDS-Zahl in seiner Eigenfrequenz an, so dass es zur Resonanz kommt. Es stellt sich die Frage, wann eine Strömung mit einer anderen REYNOLDS-Zahl von den Zylinderschwingungen so beeinflusst wird, dass Lock-in auftritt.

Für die REYNOLDS-Zahlen $\text{Re} = 95, 105, 110, 130$ sind die Verschiebungsverläufe des Zylindermittelpunktes in Abbildung 4.11 dargestellt. Wie er-

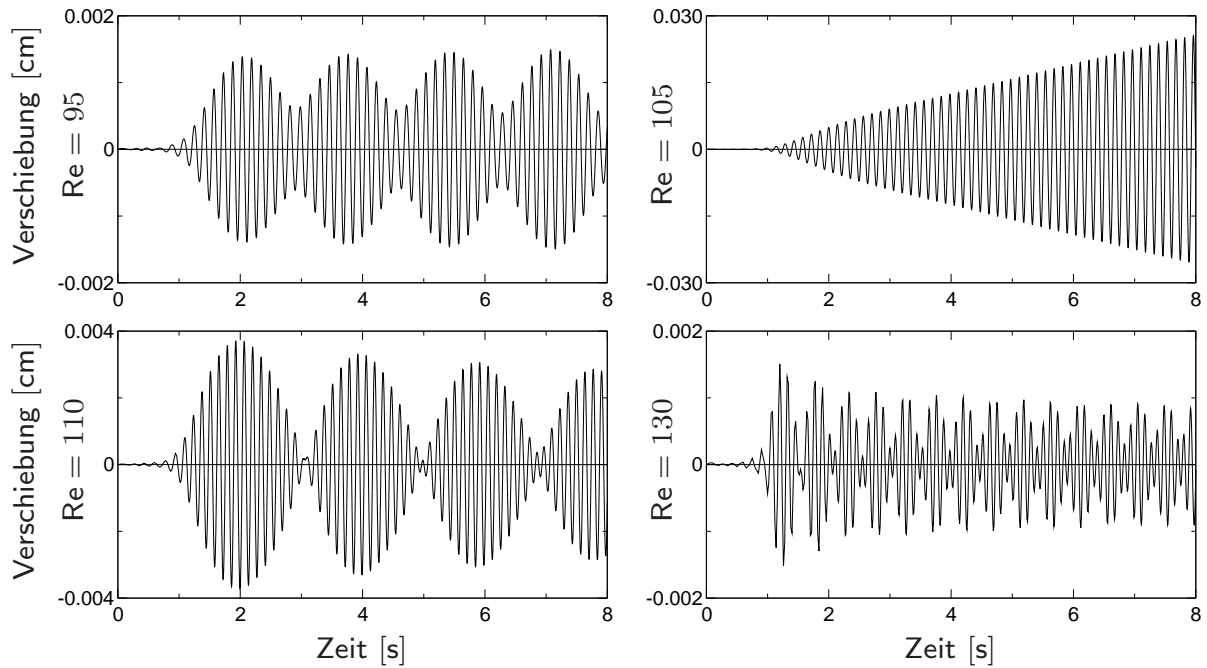


Abbildung 4.11: Vertikalverschiebungen bei unterschiedlichen REYNOLDS-Zahlen

wartet fachen die ablösenden Wirbel die Zylinderschwingungen bei $\text{Re} = 105$ an. Nach ca. 1 s ist die Einhüllende nahezu linear von der Zeit abhängig, so dass sich das gekoppelte System wie ein ungedämpfter Ein-Masse-Schwinger verhält. Bei den drei anderen Berechnungen mit $\text{Re} = 95, 110$ und 130 ist keine Anfachung der Schwingungen zu beobachten; vielmehr kommt es durch die nahe beieinander liegenden Frequenzen zu einer Schwebung. Anzumerken ist, dass die periodisch-stationären Lösungen bei den dargestellten Verschiebungsverläufen noch nicht ganz erreicht sind.

In Abbildung 4.12 ist das Frequenzspektrum der den Zylinder belastenden

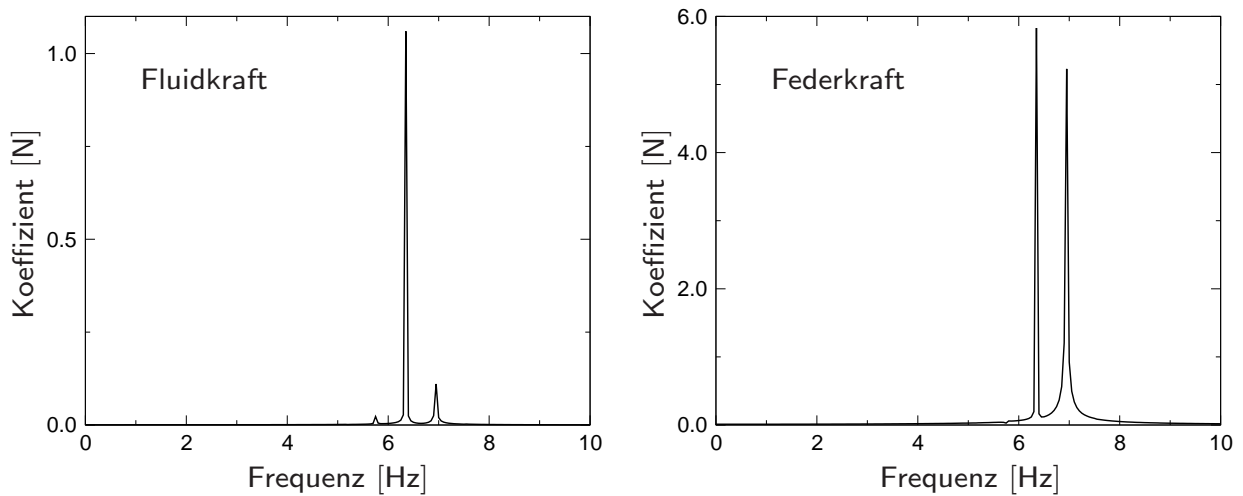


Abbildung 4.12: Frequenzspektren der Fluid- und Federkraft bei $Re = 95$

vertikalen Fluidkraft der Federkraft bei $Re = 95$ gegenübergestellt. Die Eigenfrequenzen von Fluid und Struktur sind klar voneinander getrennt. Während auf der Fluidseite die Fluideigenfrequenz dominiert, sind die Eigenfrequenzen bei der Feder nahezu gleichwertig vertreten. Dies legt den Schluss nahe, dass der gegenseitige Einfluss im gekoppelten System auf die Strömung gering ist, hingegen der Einfluss auf den Ein-Masse-Schwinger durch Anregung in seiner Resonanzfrequenz größer ist. Im gekoppelten System ist die Federkraft damit annähernd doppelt so groß wie bei Anregung des ungekoppelten Ein-Masse-Schwingers ausschließlich mit der Ablösefrequenz.

In Abbildung 4.13 sind die Federkräfte den einwirkenden Fluidkräften gegenübergestellt. Der bei einem ungedämpften Ein-Masse-Schwinger charakteristische Phasenwinkel bei Anregung unterhalb der Eigenfrequenz von $\varphi = 0$, mit der Eigenfrequenz von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und über der Eigenfrequenz von $\varphi = \pi$ ist aus den Zeitverläufen abzulesen. Bei $Re = 105$ ist der Phasenwinkel nicht exakt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da die Ablösefrequenz nicht ganz mit der Eigenfrequenz des Ein-Masse-Schwingers übereinstimmt und zudem ein gekoppeltes System vorliegt.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus der Literatur liefert ein unklares Bild. Während ANAGNOSTOPOULOS & BEARMAN in ihren experimentellen Untersuchungen einen Lock-in-Bereich von $Re = 100 \div 130$ beobachten, wird dieser in numerischen Untersuchungen von NOMURA und SARRATE & HUERTA auf etwa $Re = 110 \div 120$ und von YOUNG & CHANG auf Werte um $Re = 106$ eingeschränkt. In der vorliegenden Arbeit ist der Lock-in-Bereich in Übereinstimmung mit YOUNG & CHANG auf Werte um $Re = 105$ beschränkt.

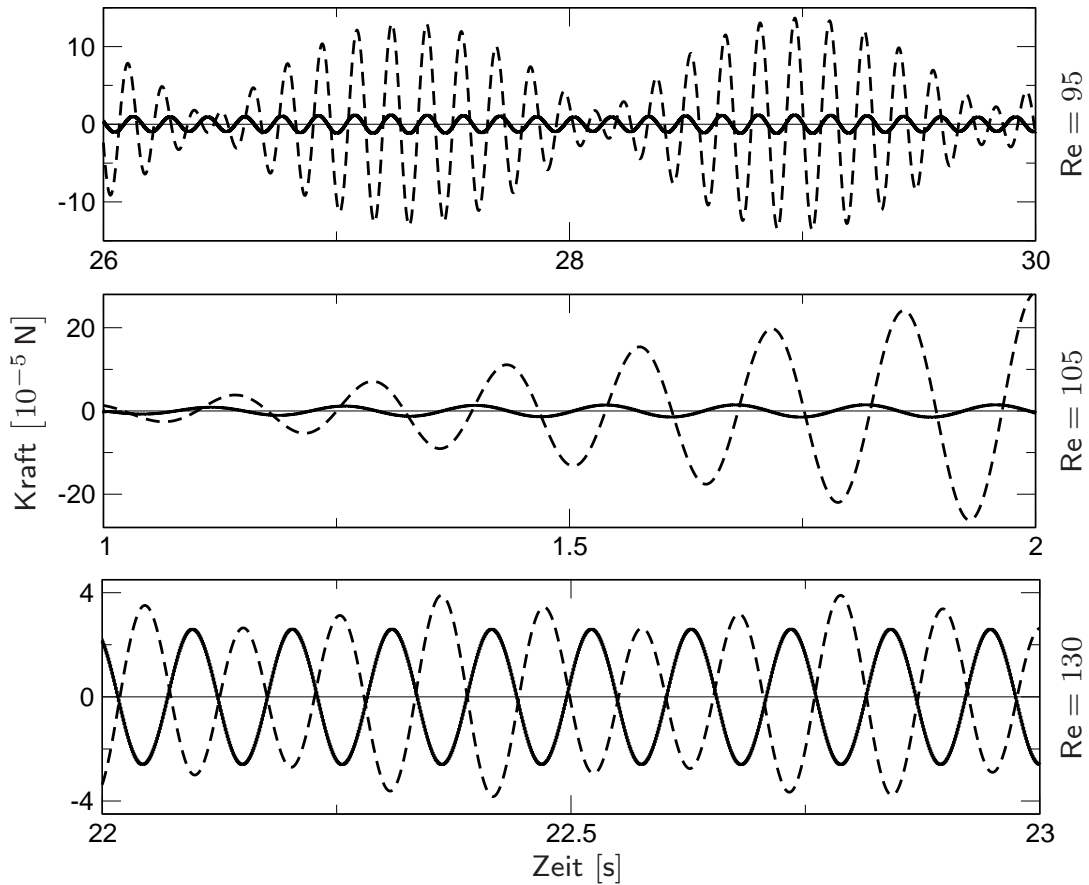


Abbildung 4.13: Fluidkraft und Federkraft (gestrichelt)

Ein Grund für die unterschiedlichen numerischen Ergebnisse könnte in den von den anderen Autoren verwendeten gröberen Diskretisierungen, besonders um den Zylinder herum, und damit der nicht so feinen Auflösung der Grenzschicht liegen. Weitere Unterschiede sind in der Kopplungsstrategie und im Zeitintegrationsverfahren zu finden.

Gekoppeltes System mit Auslenkung

Die Systemantwort des gekoppelten Systems ändert sich stark, wenn der Zylinder temporär durch eine zusätzliche äußere Last ausgelenkt wird. Im Gegensatz zum ungestörten System kommt es so in einem wesentlich größeren REYNOLDS-Zahlenbereich zum Lock-in-Effekt.

ANAGNOSTOPOULOS untersucht in [2, 3] an einem geführten starren Kreiszylinder den Übergang in den Lock-in-Bereich in Abhängigkeit von der eingepprägten maximalen Auslenkung und der Schwingungsfrequenz des Zylinders. Durch die eingepprägten Zylinderschwingungen wird von ANAGNOSTOPOULOS nur die Strömung ohne Wechselwirkung berechnet. In Abbildung 4.14

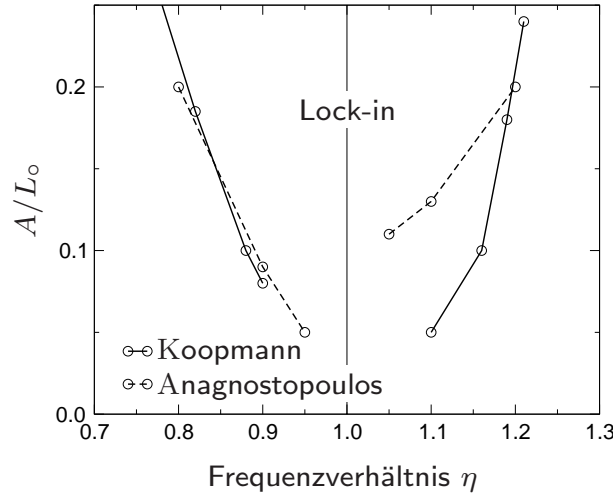


Abbildung 4.14: Lock-in-Bereiche des geführten Zylinders aus [2, 44]

ist der bei $Re = 106$ berechnete und der von KOOPMANN [44] experimentell ermittelte Lock-in-Bereich eingetragen. Auf der Abszisse ist das Verhältnis η der Schwingungsfrequenz des geführten Starrkörpers f^S zur Fluideigenfrequenz f^F mit

$$\eta = f^S / f^F \quad (4.10)$$

aufgetragen. Die Ordinatenwerte geben das Verhältnis der Verschiebungsamplitude zum Zylinderdurchmesser wieder. Mit zunehmender Amplitude ist eine Aufweitung des Bereichs, in dem Lock-in auftritt, zu beobachten. Dies ist gleichbedeutend mit einer Aufweitung des REYNOLDS-Zahlenbereichs, in dem Lock-in auftritt, wenn die Schwingungsfrequenz des Starrkörpers konstant gehalten wird. Jedoch können die Ergebnisse dieses ungekoppelten Systems nur Hinweise auf das Verhalten des gekoppelten Systems liefern, welches hier untersucht wird.

Als erstes wird das gekoppelte System in der Nähe der Resonanzfrequenz bei $Re = 110$ untersucht. Der Zylinder wird für 2.5s mit der Last $p = 2.895 \cdot 10^{-3}$ N belastet. Sie ist äquivalent zu einer statischen Auslenkung von 0.05 cm. Nach Ablauf der Zeit wird das System nicht weiter von außen gestört oder verändert. In Abbildung 4.15 (links) schwingt der Zylinder unter dem Einfluss der äußeren Last um $u = 0.05$ cm herum. Nach Wegfall der Last bleibt die Größe der maximalen Auslenkung nahezu gleich, jedoch schwingt der Körper nun um die Nulllage. Im weiteren Zeitverlauf ist eine Dämpfung des Systems zu erkennen, wobei die Amplituden mit der Zeit immer langsamer kleiner werden. In der rechten Abbildung ist der periodisch-stationäre Zustand zu einem späteren Zeitpunkt fast erreicht. Die maximale Auslenkung ist dabei $u = 0.048$ cm.

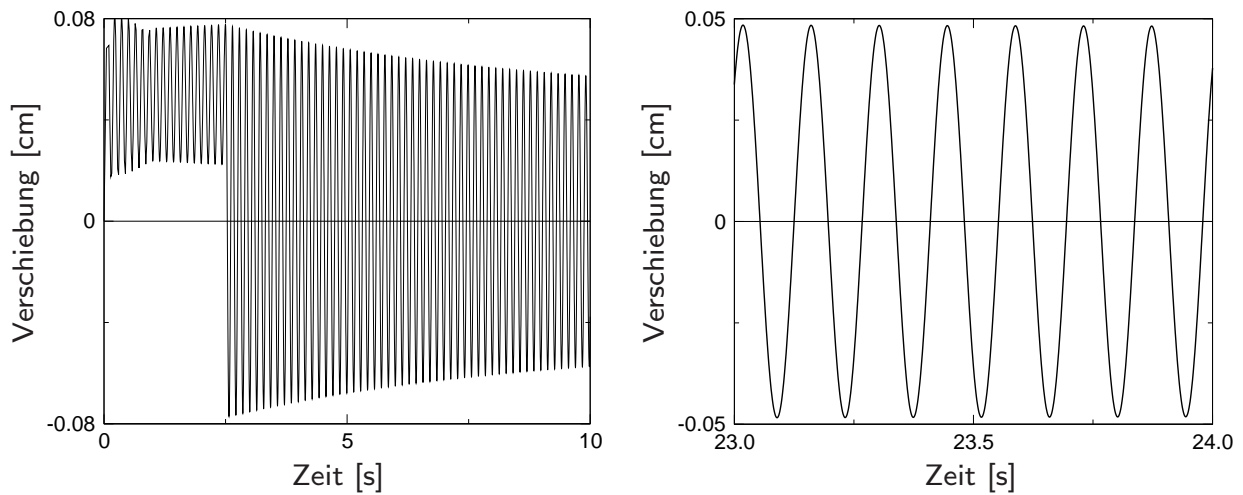


Abbildung 4.15: Vertikalverschiebung bei $Re = 110$ mit Auslenkung

Im Vergleich zum Verschiebungsverlauf des Zylinders erreichen die Zustandsgrößen des Fluids am Ausfluss relativ schnell ihren periodisch-stationären Zustand. In Abbildung 4.16 (links) sind die ersten 10 s der Vertikalgeschwindigkeit in Ausflussmitte dargestellt. Die Störung durch die Auslenkung des Zylinders ist mit einem Zeitversatz von etwa 0.5 s zu erkennen. Die auf 7.0 Hz veränderte Ablösefrequenz ist rechts abzulesen.

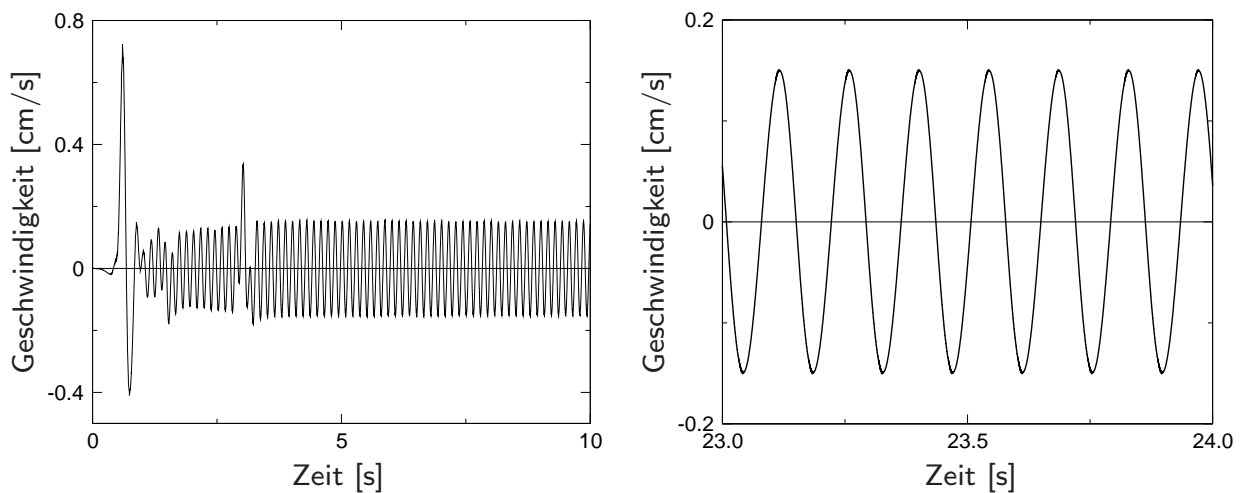


Abbildung 4.16: Vertikalgeschwindigkeit am Ausfluss bei $Re = 110$

Wird der Zylinder mit der kleineren Last $p = 1.158 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ausgelenkt, so schwingt der Zylinder zu Anfang der Berechnung um den Wert $u = 0.02 \text{ cm}$. Die Amplitude steigt nach Wegfall der Last an und hat dieselbe periodisch-stationäre Lösung wie mit der größeren Last, so dass das gekoppelte System eine stabile periodisch-stationäre Lösung mit Lock-in hat.

Bei einer REYNOLDS-Zahl von $Re = 130$ und einer Auslenkungslast von $p = 2.895 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ kommt es ebenfalls zum Lock-in, wobei das System keine periodisch-stationäre Lösung mit Lock-in hat, da die Schwingungsamplituden im zeitlichen Verlauf immer kleiner werden, siehe Abbildung 4.17

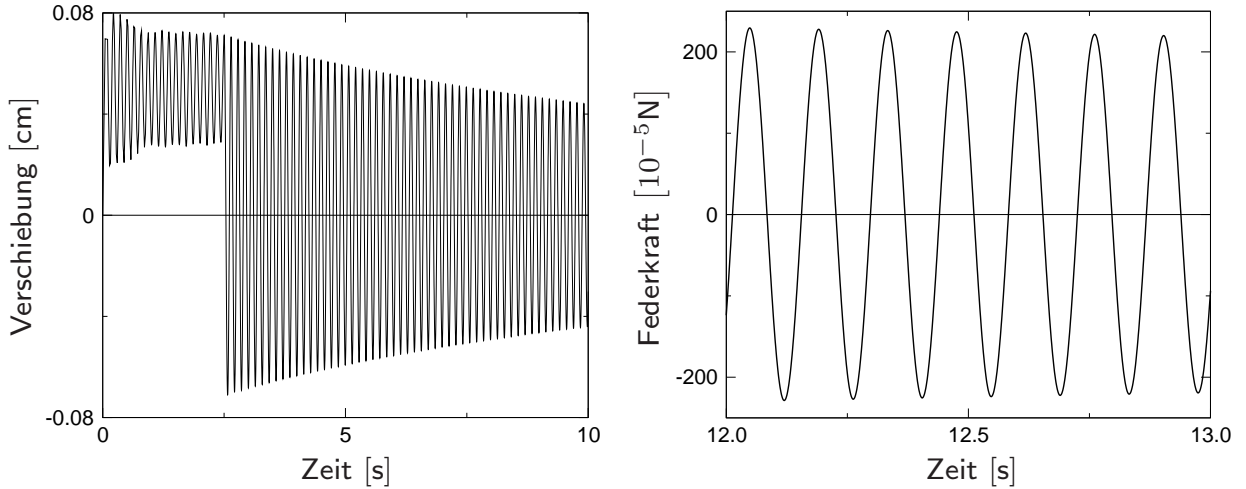


Abbildung 4.17: Verschiebung (links) und Federkraft (rechts) bei $Re = 130$

(links). Die Federkraft ist im zeitlichen Verlauf um ein Vielfaches größer als bei dem System ohne Auslenkung, das sich nicht im Lock-in-Bereich befindet. Beispielsweise ist sie in dem in Abbildung 4.17 (rechts) dargestellten Zeitintervall über 50-mal größer, vgl. Abbildung 4.13.

4.1.4 Zusammenfassende Bewertung

Bei Umströmung des unverschieblich gelagerten Kreiszylinders in Abschnitt 4.1.2 bildet sich die VON KÁRMÁNsche Wirbelstraße mit ihren wechselseitig vom Zylinder ablösenden Wirbeln nach kurzer Zeit aus. Die FOURIER-Transformierte der Vertikalgeschwindigkeit im periodisch-stationären Bereich liefert ein klar von der Wirbelablösefrequenz dominiertes Frequenzspektrum. Die Ablösefrequenzen liegen bei den Berechnungen etwas höher als die von SARRATE & HUERTA [63] berechneten Werte, wobei das hier verwendete in der Nähe des Zylinders sehr feine Finite-Element-Netz zusammen mit der Genauigkeit des Zeitintegrationsverfahrens eine wesentlich genauere Approximation ermöglicht.

Bei der Analyse des elastisch gelagerten Kreiszylinders in Abschnitt 4.1.3 stellt sich heraus, dass im Gegensatz zu anderen experimentellen und numerischen Untersuchungen kein breiter REYNOLDS-Zahlenbereich vorhanden ist, in dem das Lock-in-Phänomen auftritt. Erst dicht an der REYNOLDS-Zahl,

die äquivalent der Resonanzfrequenz ist, kommt es zum Lock-in. Untermauert werden die Ergebnisse von YOUNG & CHANG [82], die zu einem ähnlichen Ergebnis kommen. Die Untersuchungen zeigen ebenfalls, dass die Wechselwirkung nur schwach ist, da sich die Strömung im Gegensatz zur Struktur nur unwesentlich anders im gekoppelten System als im ungekoppelten System mit unverschieblichem Zylinder verhält.

Mit einer zusätzlichen Auslenkung infolge einer temporären Last zu Anfang der Berechnung kann das gekoppelte System in einen anderen Lösungspfad gelangen, wobei zwei Phänomene zu beobachten sind. Zum einen kommt es bei den verwendeten Lastgrößen zum Lock-in. Zum anderen kann sich eine periodisch-stationäre Lösung mit Lock-in einstellen, so dass das gekoppelte System mindestens zwei Lösungen besitzt: eine mit schwacher Wechselwirkung und eine mit starker, nichtlinearer Wechselwirkung infolge einer stärkeren Störung des Systems. Die Ergebnisse liegen in dem von ANAGNOSTOPOULOS [2, 3] an einem geführten starren Kreiszyylinder ermittelten REYNOLDS-Zahlenbereich, in dem es zum Lock-in kommt. Weitere Untersuchungen sind notwendig, um die Abhängigkeit des zweiten Lösungspfades von der Auslenkung und der REYNOLDS-Zahl über einen größeren Bereich zu ermitteln. Jedoch ist der Zeitraum bis zum Erreichen der periodisch-stationären Lösung infolge der geringen physikalischen Dämpfung sehr lang und damit der numerische Aufwand groß. Interessant ist ebenfalls eine Analyse des gekoppelten Systems mit einem rotierenden Zylinder, da durch die Rotation der Lock-in-Bereich stark unsymmetrisch [52] wird.

Die Bewertung der Lösungsstrategie des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt auf Grundlage von Netz II, das auf ein System mit ca. 32 000 Gleichungen¹ führt. Für die Berechnungen steht ein Rechner mit einem AMD Athlon Prozessor mit 1.4 GHz und ausreichend Hauptspeicher zur Verfügung. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfordert der PICARD-Algorithmus meist nur vier Iterationsschritte bei einer Fehlerschranke von $\varepsilon = 10^{-7}$ für das relative Residuum. Ein Schritt wird dabei in durchschnittlich 5 s gelöst – Ausnahme ist der Zeitschritt, in dem der Vorkonditionierer die Systemmatrix zerlegt, dann sind 86 s notwendig. Die adaptive Steuerung des Zerlegungsintervalls des Vorkonditionierers wählt nach den ersten Sekunden ein Intervall von 400 Schritten der PICARD-Iteration, bevor eine erneute Zerlegung durchgeführt wird. Demnach wird in dem Intervall für 399 Schritte eine Beschleunigung des Löser um den Faktor 17 erreicht. Der Faktor ist stark von der gewählten Zeitschrittweite abhängig und wird größer bei kleinerer Schrittweite. Zum Erfüllen der Fehlerschranke von $\varepsilon = 10^{-7}$ wird

¹Die meisten Werte, die in diesem Absatz angegeben sind, sind ungefähre Werte.

gegenüber einem $\varepsilon = 10^{-4}$ ein PICARD-Iterationsschritt mehr benötigt. Die größere Fehlerschranke macht aber von der Numerik her wenig Sinn, weil der numerische Aufwand für den zusätzlichen Schritt nahezu vernachlässigbar ist. Der BiCGStab-Gleichungslöser benötigt für den dritten und vierten PICARD-Iterationsschritt meist nur einen Iterationsschritt. Insgesamt benötigt die Berechnung von einem 30 s langen Zeitverlauf eine Woche, dabei sind 29 000 Zeitschritte zu berechnen, so dass insgesamt über 120 000 lineare Gleichungssysteme zu lösen sind.

Die verwendete Lösungsstrategie zeigt im Zusammenspiel mit dem Diskretisierungsverfahren auf Einzelplatzrechnern bzw. unter Verwendung eines einzigen Prozessors eine sehr gute numerische Effektivität. Trotz der effektiven Lösungsstrategie stellen die in diesem Kapitel diskutierten Anwendungen jedoch die Grenzen der derzeit auf einzelnen Prozessoren durchführbaren Berechnungen dar. Für vergleichbare Anwendungen mit mehr Freiwerten ist eine verteilte Berechnung auf Parallelrechnern unumgänglich.

4.2 Wirbelerregte elastische Platte

In diesem Anwendungsbeispiel, das auf WALL [77] zurückgeht, wird eine umströmte elastische Platte im Nachlauf eines quadratischen Starrkörpers untersucht. Die Referenzkonfiguration ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Es ist zu erwarten, dass sich bei der Umströmung Wirbel an den Kanten des Starrkörpers ablösen und diese die elastische Platte zum Schwingen anregen.

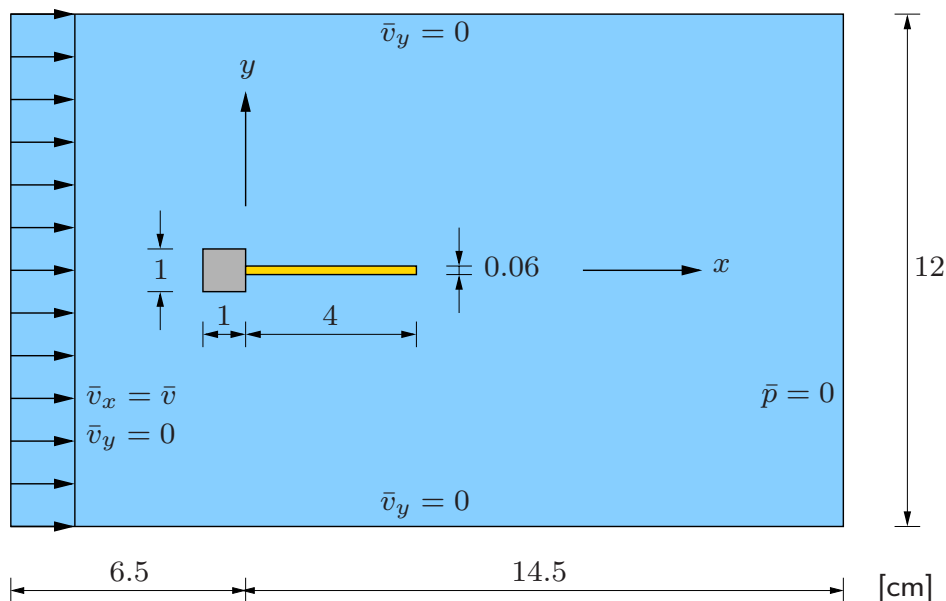


Abbildung 4.18: Wirbelerregte elastische Platte

Treten Schwingungen mit großen Amplituden auf, so ist eine Rückwirkung auf die Strömung zu erwarten. Es existieren jedoch in der Literatur für diese Aufgabenstellung keine Referenzlösungen, so dass für die hier berechneten Systemantworten nur eingeschränkte Vergleiche mit den Ergebnissen von WALL möglich sind, der eine schwache Kopplung verwendet.

Die elastische Platte hat zwei Sätze von Materialparametern. Während im ersten Satz Elastizitätsmodul und Dichte die Werte $E = 2.5 \cdot 10^6 \text{ g/cm/s}^2$ und $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ annehmen, haben sie im zweiten Satz die Werte $E = 2.0 \cdot 10^6 \text{ g/cm/s}^2$ und $\rho = 2.0 \text{ g/cm}^3$. Für beide Sätze wird eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0.35$ und ein ebener Spannungszustand gewählt. Die beiden Sätze werden im Weiteren mit *Platte I* und *Platte II* bezeichnet. Die Materialparameter des Fluids sind mit einer Zähigkeit von $\mu = 1.82 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm/s}$ und einer Dichte von $\rho = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ konstant.

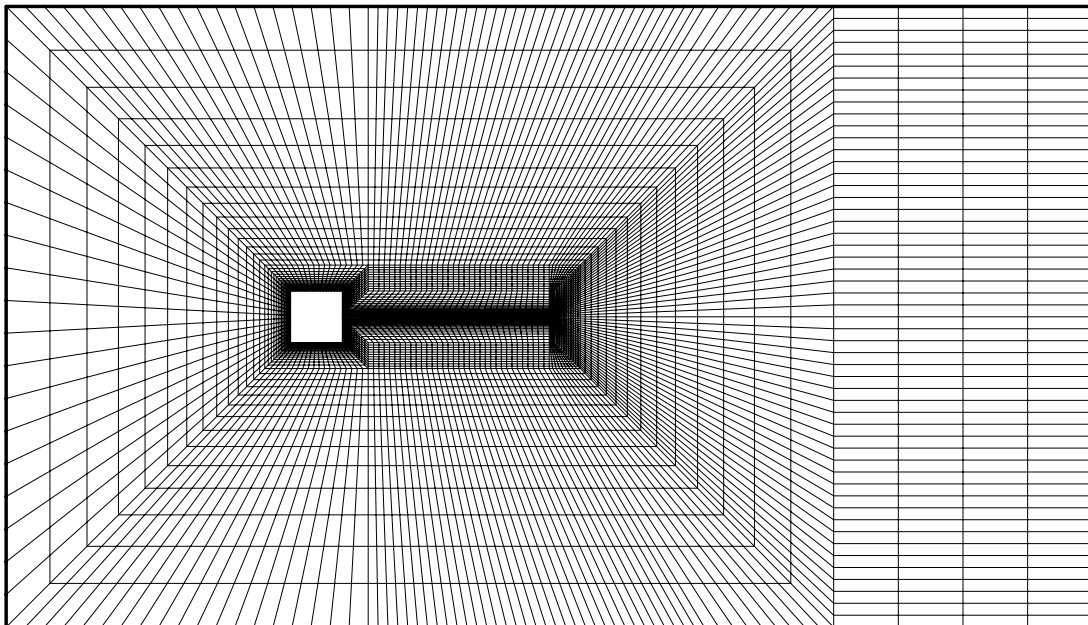


Abbildung 4.19: Finite-Element-Netz

Abbildung 4.19 zeigt das zur Berechnung verwendete Finite-Element-Netz. Es beinhaltet 8338 Fluid- und 136 geometrisch nichtlineare Strukturelemente und führt auf ein Gleichungssystem mit 52766 Gleichungen. Zur Auflösung der Wirbel und der Grenzschichten in der Umgebung der Festkörper ist eine sehr feine Diskretisierung notwendig. Die hierzu verwendete Elementierung ist in Abbildung 4.20 dargestellt.

Das System wird für zwei Anströmgeschwindigkeiten $\bar{v}_1 = 31.5 \text{ cm/s}$ und $\bar{v}_2 = 51.3 \text{ cm/s}$ untersucht. Mit der Höhe des quadratischen Starrkörpers als charakteristisches Längenmaß haben die Strömungen eine REYNOLDS-Zahl

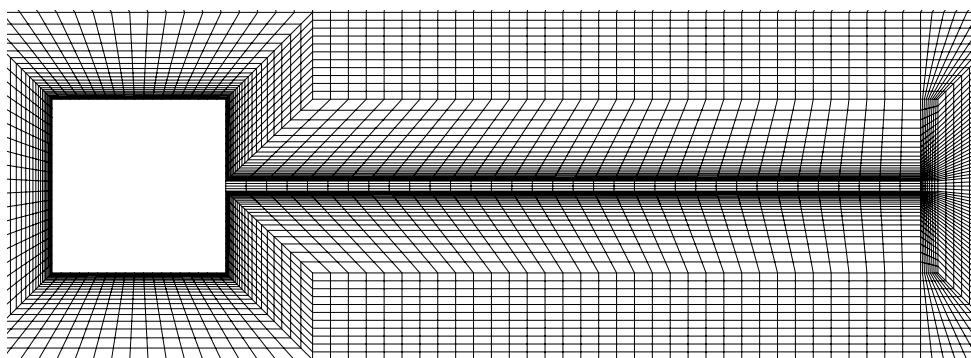


Abbildung 4.20: FE-Netz in der Umgebung der Festkörper

von $Re = 204$ bzw. $Re = 333$. Die höhere Anströmgeschwindigkeit dient zum Vergleich mit den Berechnungen von WALL [77], die kleinere zur Untersuchung der Abhängigkeit der Systemantwort von der Wirbelablösefrequenz.

Die Platte II ohne Fluid wird in Abschnitt 3.2.3 untersucht. Die mit den gemischten Elementen numerisch berechneten Platteneigenfrequenzen aus Tabelle 3.1 sind in guter Übereinstimmung mit den analytischen Werten des BERNOULLI-Balkens, die in Tabelle 4.1 für beide Parametersätze eingetragen sind.

| | 1. | 2. | 3. |
|-----------|------|------|------|
| Platte I | 3.0 | 19.0 | 53.2 |
| Platte II | 0.61 | 3.8 | 10.6 |

Tabelle 4.1: Eigenfrequenzen in Hz

4.2.1 Starre Platte

Zunächst wird die Platte als starr angenommen, um den Einfluss der Wechselwirkung im Vergleich zum ungekoppelten System untersuchen zu können. Die Berechnung erfolgt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.001$ s.

Abbildung 4.21 zeigt das Geschwindigkeits- und Druckfeld für jeweils eine charakteristische Konfiguration mit drei Wirbeln im Bereich der Platte für beide Anströmgeschwindigkeiten. Im zeitlichen Verlauf sind im Wechsel immer zwei Wirbel auf einer Seite und der dritte in der Mitte der beiden auf der anderen Seite. Der einzelne Wirbel ist dabei immer stärker als die beiden gegenüberliegenden. Beim Vergleich der beiden Anströmgeschwindigkeiten sind die Wirbel bei der größeren Geschwindigkeit ausgeprägter als bei der

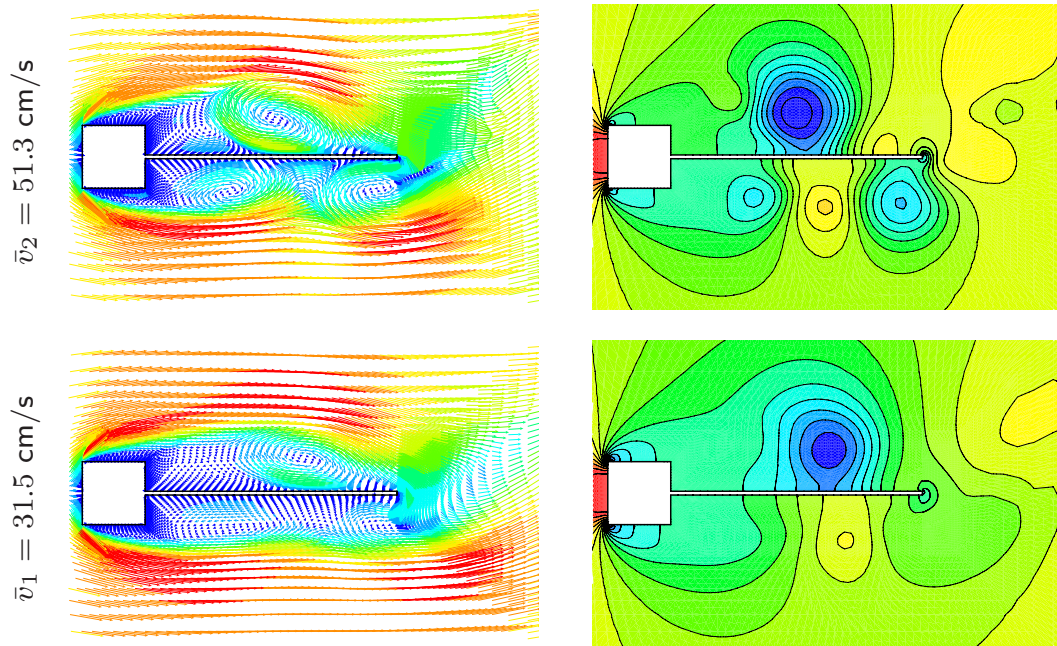


Abbildung 4.21: Geschwindigkeits- und Druckfeld, unterschiedliche Skalierung

kleineren. Die Anordnung der Wirbel lässt vermuten, dass eine elastische Platte anstelle der starren nicht wesentlich zu Schwingungen angeregt wird, da immer mindestens ein Wirbel dämpfend auf sie einwirkt. Dass die Antwort des gekoppelten Systems ganz anders aussehen kann, wird in den beiden folgenden Abschnitten gezeigt.

Die über die Platte wandernden Wirbel haben für die kleinere Anströmgeschwindigkeit eine Ablösefrequenz von $f_1^F = 3.7 \text{ Hz}$ und für die größere eine von $f_2^F = 6.2 \text{ Hz}$.

4.2.2 Elastische Platte angeströmt mit $\bar{v}_1 = 31.5 \text{ cm/s}$

In diesem Abschnitt wird das gekoppelte System mit der kleineren Anströmgeschwindigkeit $\bar{v}_1 = 31.5 \text{ cm/s}$ betrachtet. Für Platte I wird keine große Anregung erwartet, da die Wirbelablösefrequenz $f^F = 3.7 \text{ Hz}$ nicht in der Nähe der Platteneigenfrequenzen $f^S = 3.0, 19.0$ bzw. 53.2 Hz liegt. Hingegen wird für Platte II eine stärkere Anregung erwartet, da die Ablösefrequenz nahe der zweiten Eigenfrequenz $f_2^S = 3.8 \text{ Hz}$ liegt.

Platte I

Wie erwartet schwingt der Endpunkt der Platte I, siehe Abbildung 4.22, mit nur kleinen Schwingungsamplituden, wobei die periodisch-stationäre Lösung

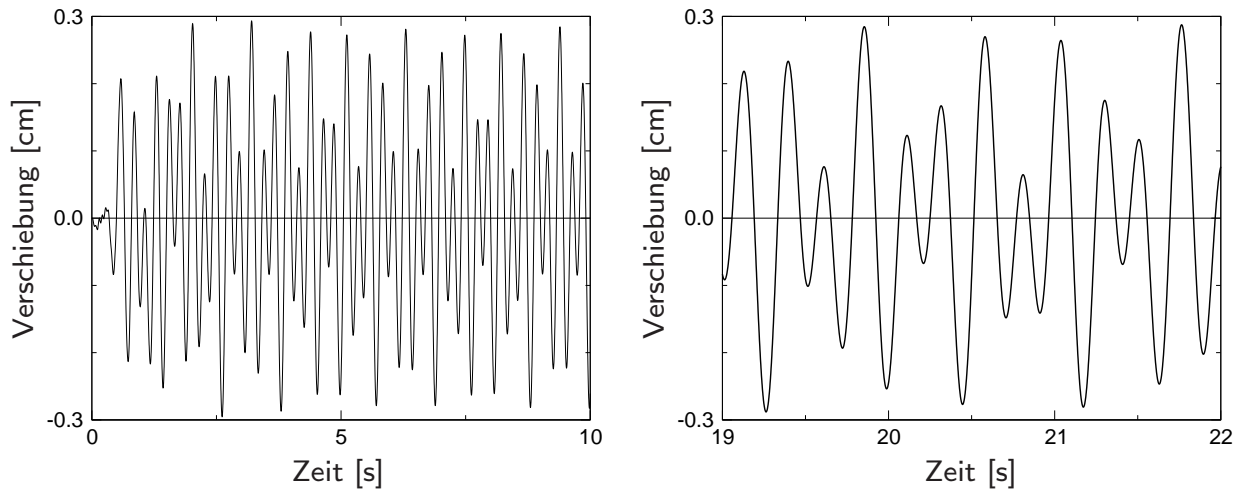


Abbildung 4.22: Platte I: Vertikalverschiebung ohne Anfangsauslenkung

schnell erreicht wird. Die Amplituden sind mit $A \leq 0.3$ cm wesentlich kleiner als die halbe Kantenlänge des wirbelerzeugenden quadratischen Starrkörpers mit $\frac{1}{2}L = 0.5$ cm, wobei die Schwingungen eine Schwebung aufweisen. Wenn hingegen die Platte in der ersten Sekunde durch eine zusätzliche äußere Kraft mit $5 \cdot 10^{-5}$ N ausgelenkt wird, stellt sich eine andere Lösung ein. Abbildung 4.23 zeigt den zeitlichen Verlauf infolge der hervorgerufenen An-

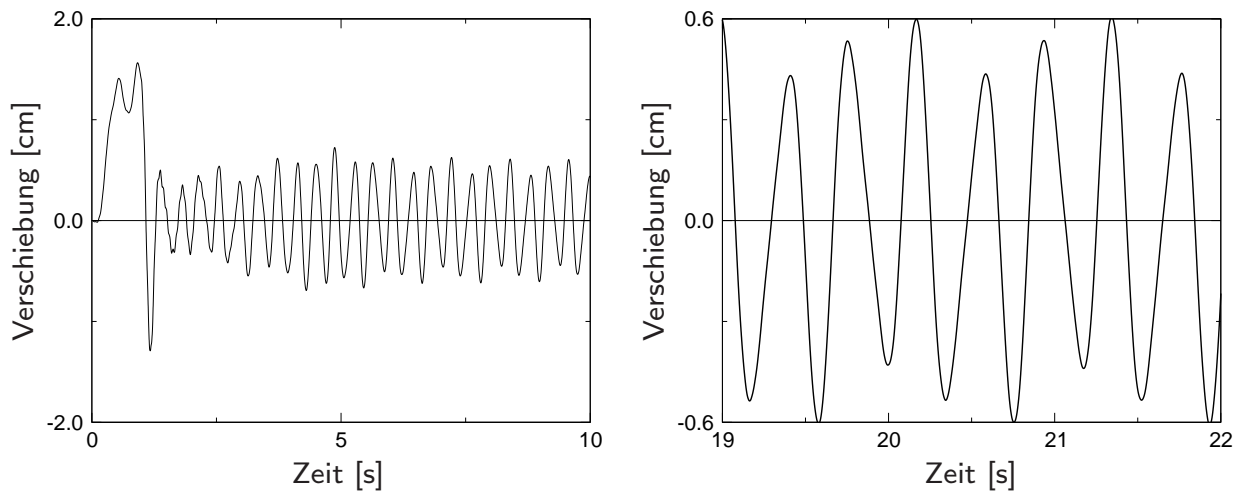


Abbildung 4.23: Platte I: Vertikalverschiebung mit Anfangsauslenkung

fangsauslenkung. Die maximale Amplitude ist im periodisch-stationären Bereich mit $A = 0.6$ cm etwa doppelt so groß wie vorher, zudem ist sie damit auch größer als die halbe Kantenlänge des Starrkörpers.

Die Frequenzspektren sind für beide Berechnungen in Abbildung 4.24 dargestellt. Im Wesentlichen sind die Frequenzen $f_1^C = 2.6$ Hz und $f_2^C = 4.21$ Hz dominant, wobei diese weder Eigenfrequenzen der Strömung noch der Platte

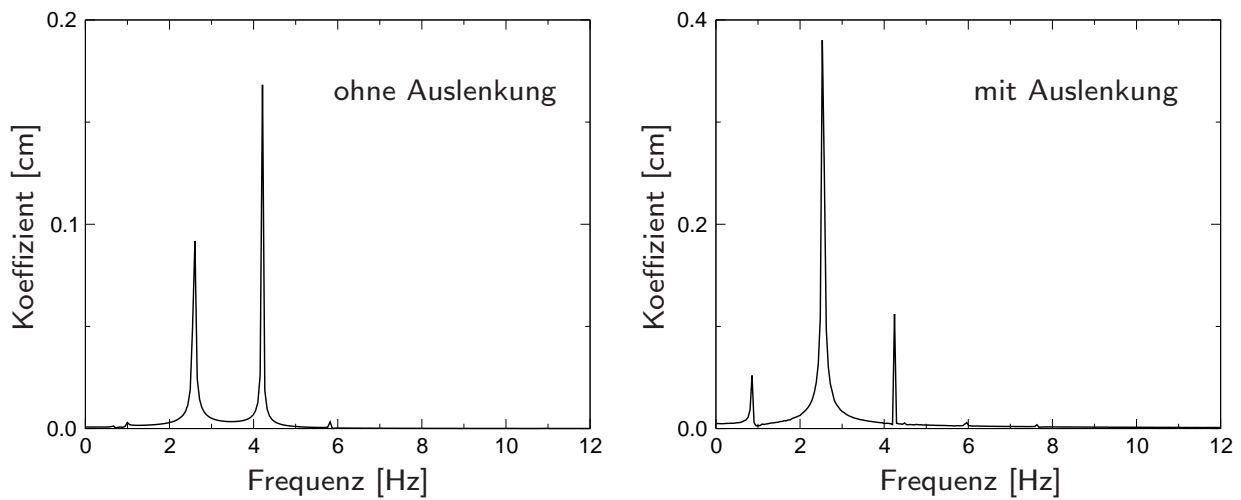


Abbildung 4.24: Platte I: Frequenzspektrum der Vertikalverschiebung

und somit auf die Wechselwirkung zurückzuführen sind. Interessanterweise ist die zweite Frequenz $f_2^C = 4.21$ Hz im Spektrum des Systems ohne Anfangsauslenkung am stärksten vertreten, während mit Anfangsauslenkung die Platte mit $f_1^C = 2.6$ Hz langsamer schwingt.

Platte II

Platte II wird im gekoppelten System auch ohne eine Anfangsauslenkung zu Schwingungen mit relativ großen Amplituden angeregt, wie sie in Abbildung 4.25 dargestellt sind. Jedoch ist der Zeitraum bis zum Erreichen der periodisch-stationären Lösung sehr lang. Obwohl die Ablösefrequenz mit

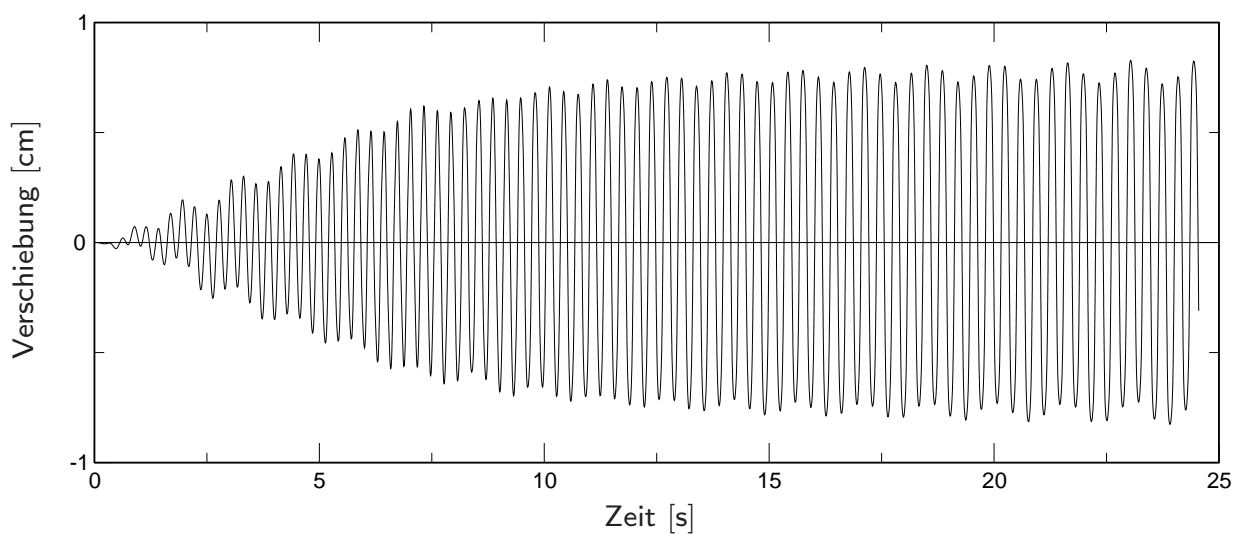


Abbildung 4.25: Platte II: Vertikalverschiebung ohne Anfangsauslenkung

$f^F = 3.7$ Hz in der Nähe der zweiten Platteneigenfrequenz $f_2^S = 3.8$ Hz liegt, schwingt die Platte am Ende mit einer Frequenz von $f^C = 3.1$ Hz, welche mit keiner Eigenfrequenz übereinstimmt.

Wird die Platte hingegen zu Anfang durch eine zusätzliche Last ausgelenkt, so stellt sich ein periodisch-stationärer Zustand sehr schnell ein, wobei sich die Lösung drastisch ändert, siehe Abbildung 4.26. Die Platte schwingt nun

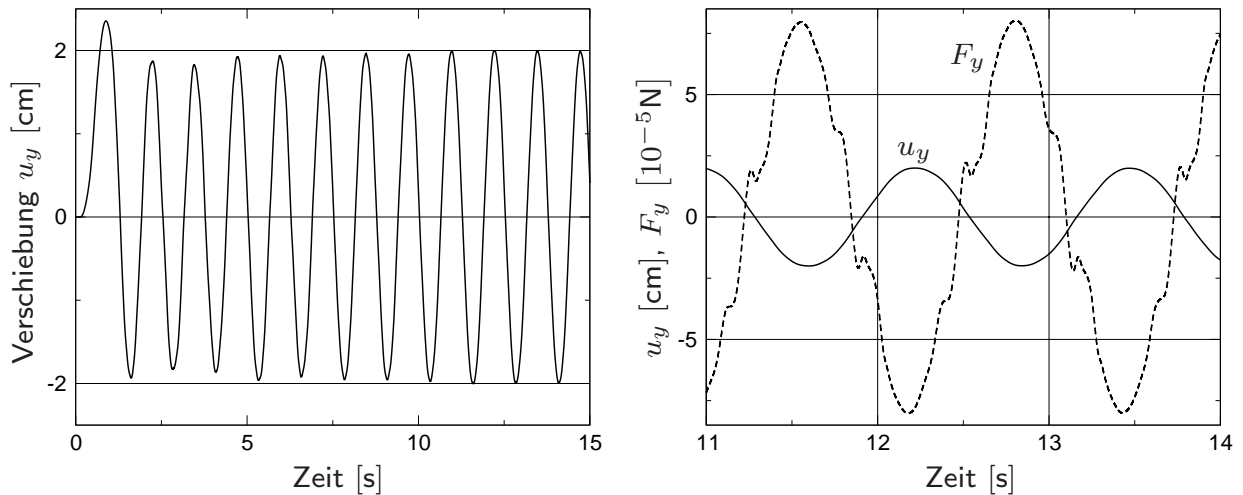


Abbildung 4.26: Platte II: Vertikalverschiebung u_y und vertikale Fluidkraft F_y

mit einer Frequenz von $f^C = 0.8$ Hz, die etwas oberhalb der ersten Platteneigenfrequenz $f_1^S = 0.61$ Hz liegt. Zudem haben sich die Schwingungsamplituden mehr als verdoppelt, so dass das Plattenende zwischen den maximalen Auslenkungen die Distanz einer Plattenlänge zurücklegt. Abbildung 4.26 (rechts) zeigt die resultierende Vertikalkraft F_y der Strömung, die gegenüber der Endverschiebung der Platte einen Phasenwinkel von $\varphi \approx \pi$ aufweist.

In Abbildung 4.27 ist etwa eine halbe Schwingungsperiode mit dem zugehörigen Geschwindigkeits- und Druckfeld dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 12.56$ s hat die Platte ihre Referenzlage gerade durchlaufen, ohne durch größere Wirbel belastet zu werden. Bei $t = 12.72$ s bildet sich ein Wirbel auf der Oberkante der Platte aus. Die fast maximale Fluidkraft wird aber nicht durch den Wirbel, sondern durch den hohen Druck an der Plattenunterseite dominiert. Erst in der folgenden Abbildungszeile bei $t = 12.92$ s dominiert der stark ausgebildete Wirbel die Fluidkraft, zumal der Druck an der Unterkante wieder kleiner ist. In den Abbildungen zum Zeitpunkt $t = 13.04$ s ist ein dem großen Wirbel entgegengesetzt drehender, kleiner Wirbel am Plattenende zu erkennen. Durch seine hohe Intensität stört er den starken Abfall der Fluidkraft, siehe Abbildung 4.26 (rechts).

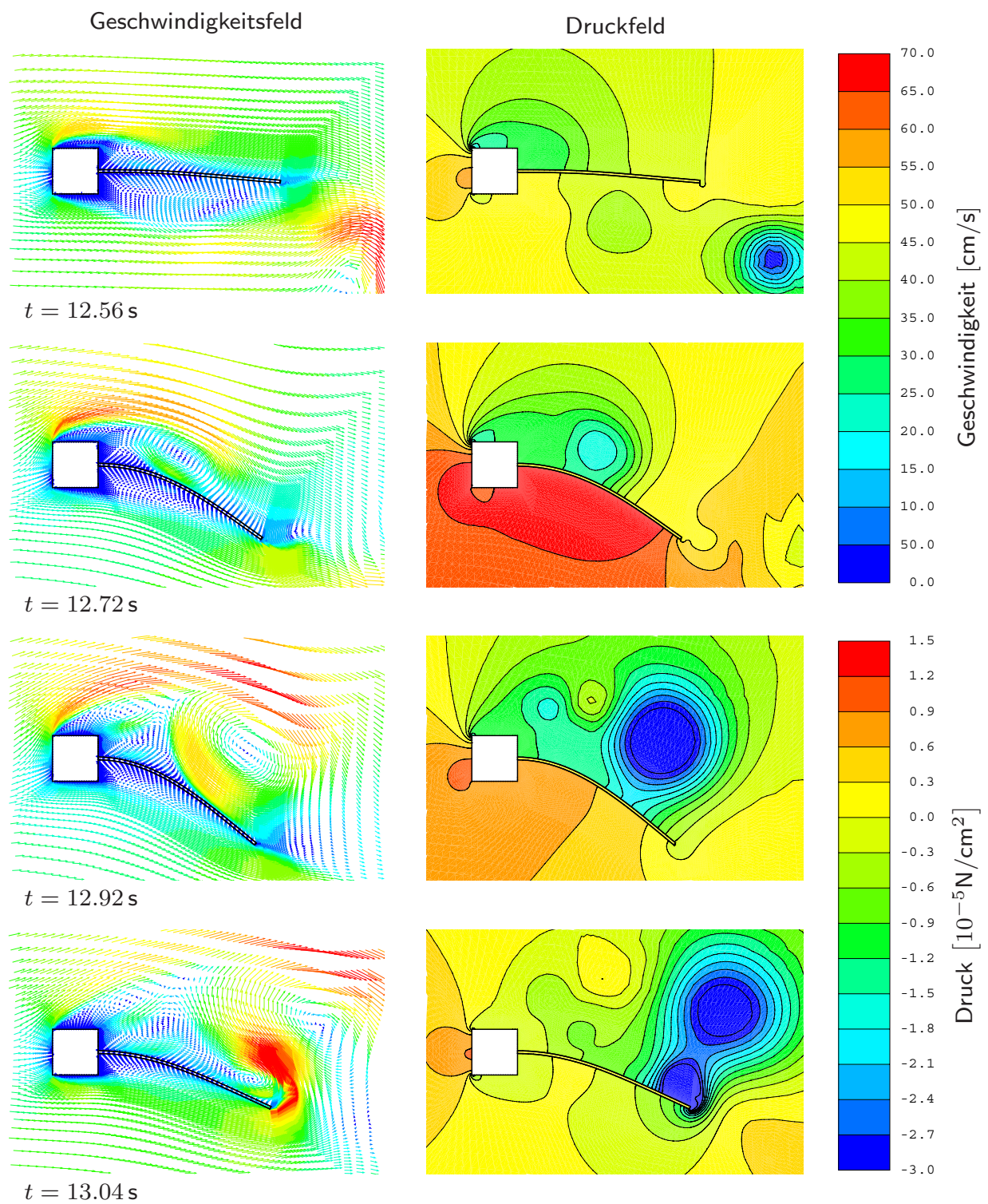


Abbildung 4.27: Platte II: Geschwindigkeits- und Druckfeld

4.2.3 Elastische Platte angeströmt mit $\bar{v}_2 = 51.3 \text{ cm/s}$

Platte I

Die Berechnung des gekoppelten Systems mit Platte I führt nach kurzer Zeit auf einen periodisch-stationären Zustand, wie er in Abbildung 4.28 (links)

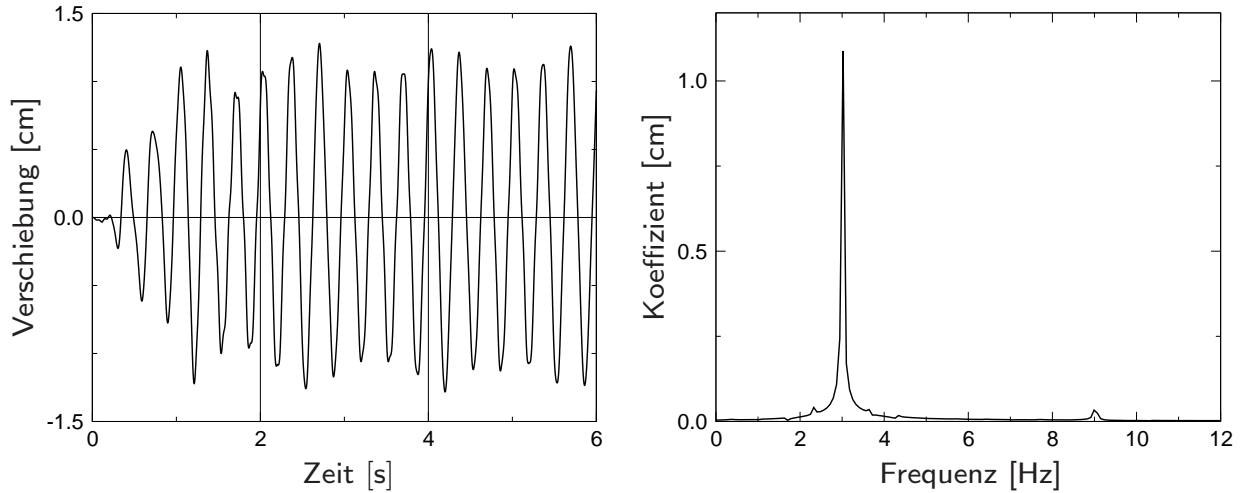


Abbildung 4.28: Platte I: Vertikalverschiebung und Frequenzspektrum

bei der vertikalen Verschiebung des Plattenendes zu erkennen ist. Rechts wird das zur Verschiebung zugehörige Frequenzspektrum von der Frequenz $f^C = 3 \text{ Hz}$ dominiert, somit schwingt die Platte in ihrer ersten Eigenfrequenz. Die in Abschnitt 4.2.1 ermittelte Wirbelablösefrequenz $f^F = 6.2 \text{ Hz}$ ist im Spektrum nicht zu erkennen. Die Systemantwort mit Schwingungsfrequenz und maximaler Amplitude stimmt im Wesentlichen mit den Ergebnissen des schwach gekoppelten Systems von WALL [77] überein.

Interessant ist ein Vergleich mit den Ergebnissen bei kleinerer Anströmgeschwindigkeit (Abschnitt 4.2.2). Die hier zu beobachtenden Verschiebungen sind gut viermal so groß, wobei die Frequenz der Plattenschwingung eindeutig der ersten Platteneigenfrequenz zuzuordnen ist, so dass die Antwort der Platte eher einer freien Schwingung gleicht als die Antwort bei der kleineren Geschwindigkeit, die stark von der Kopplung mit dem Fluid beeinflusst wird. Zudem zeigt sich, dass die periodisch-stationäre Lösung unabhängig davon ist, ob die temporäre Last zu Anfang aufgebracht wird oder nicht.

Platte II

Die Systemantwort von Platte II ist nicht eindeutig zu interpretieren. Die Plattenschwingungen, siehe Abbildung 4.29, gehen selbst in dem 40 s langen

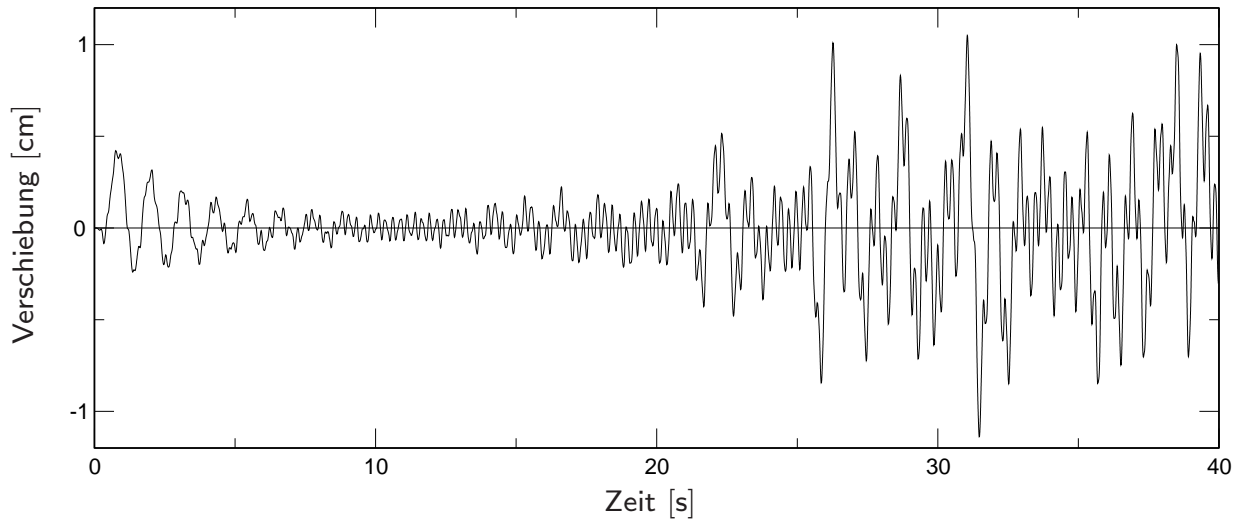


Abbildung 4.29: Platte II: Zeitverlauf der Vertikalverschiebung

Zeitbereich nicht in einen periodisch-stationären Zustand über. Innerhalb der ersten Sekunde vollzieht das Plattenende Verschiebungen bis zu $u \approx 0.4$ cm, wobei dies eine Folge der vorgegebenen Anfangsbedingungen sein kann, bei der das Fluid in Ruhelage ist. Die Schwingung klingt in den ersten 7 s ab. Nach ungefähr 22 s werden die Verschiebungen mit Werten über 0.5 cm wieder größer.

Die FOURIER-Transformierte liefert für die Zeitbereiche $8 \text{ s} \leq t \leq 18 \text{ s}$ und $33 \text{ s} \leq t \leq 38 \text{ s}$ die Frequenzspektren in Abbildung 4.30. In dem linken Spektrum sind die ersten beiden Platteneigenfrequenzen $f_1^S = 0.61 \text{ Hz}$ und $f_2^S = 3.8 \text{ Hz}$ und die Ablösefrequenz $f^F = 6.2 \text{ Hz}$ dominant; zudem ist ein kleiner Einfluss der dritten Struktureigenfrequenz $f_3^S = 10.6 \text{ Hz}$ zu erkennen.

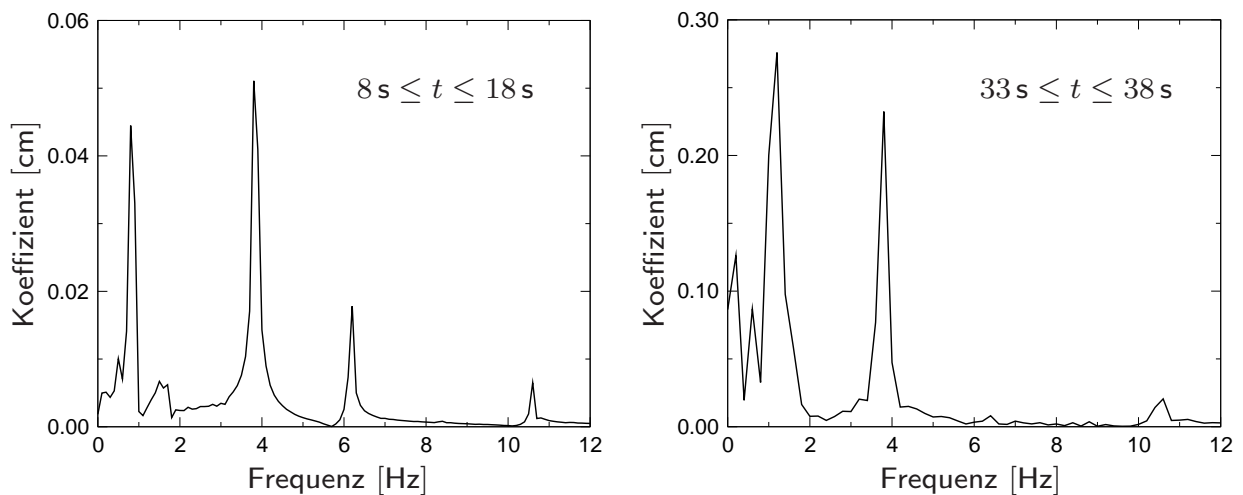


Abbildung 4.30: Platte II: Frequenzspektren der Verschiebung u_y

Im Vergleich dazu sind in dem Frequenzspektrum des zweiten Zeitbereichs die zweite Plattenfrequenz $f_2^S = 3.8 \text{ Hz}$ und die Frequenz 1.2 Hz dominant, wobei der Frequenzbereich unterhalb 1 Hz keine eindeutige Interpretation zulässt.

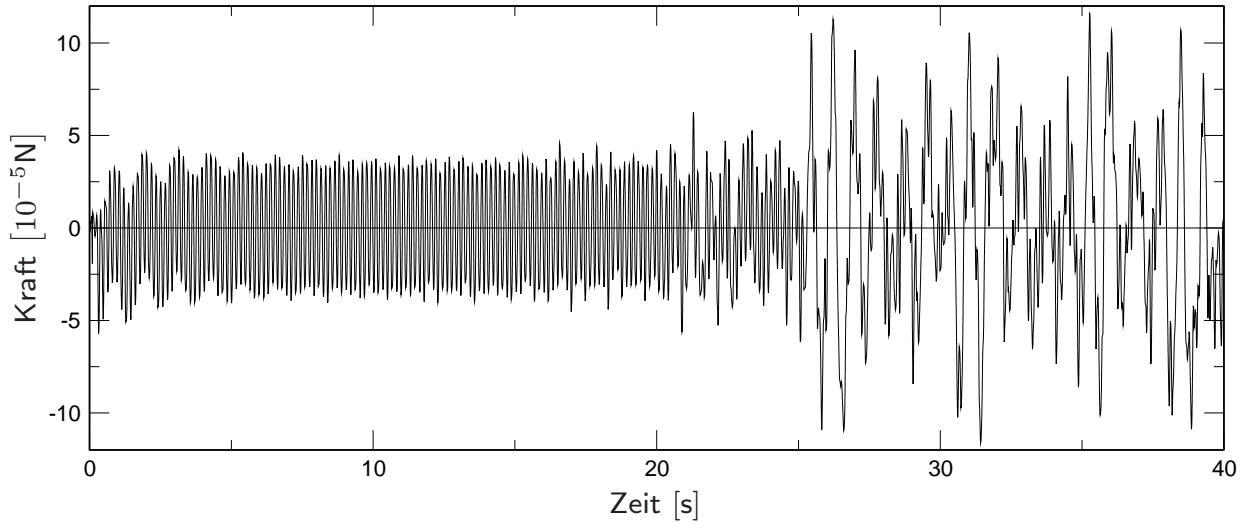


Abbildung 4.31: Platte II: Zeitverlauf der vertikalen Fluidkraft

Der zeitliche Verlauf der belastenden, vertikalen Fluidkraft, siehe Abbildung 4.31, ist in den ersten 20 s nahezu periodisch-stationär und wird, siehe Abbildung 4.32 (links), durch die Wirbelablösefrequenz $f^F = 6.2 \text{ Hz}$ dominiert. Im Zeitbereich ist demnach die Rückwirkung der Struktur auf die Strömung gering. Nach 22 s ändert sich – wie bei der Struktur – der zeitliche Verlauf der Fluidkraft stark, zudem ist wiederum die Frequenz 1.2 Hz dominant.

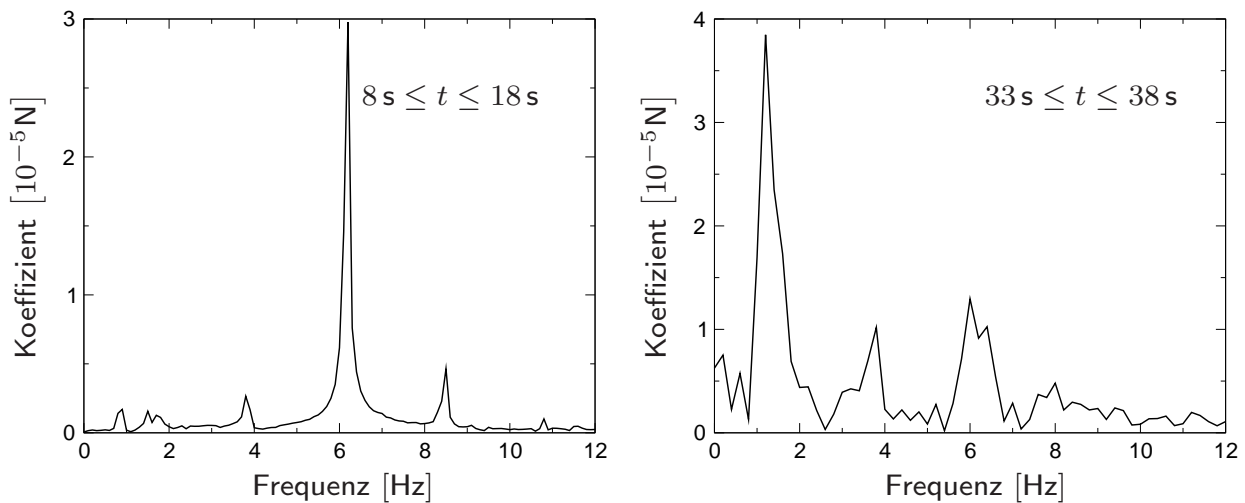


Abbildung 4.32: Platte II: Frequenzspektren der vertikalen Fluidkraft

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von WALL macht für Platte II keinen Sinn, da der von ihm betrachtete Zeitraum nur 5 s lang ist und sich bis zum Ende der Berechnung keine periodisch-stationäre Lösung einstellt. Zudem kann aus den hier gemachten Beobachtungen geschlossen werden, dass eine schwache Kopplung – wie sie von WALL verwendet wird – wahrscheinlich nicht ausreichend ist, um die Systemantwort zu bestimmen.

4.2.4 Zusammenfassende Bewertung

Bei den mit der kleineren Geschwindigkeit $\bar{v}_1 = 31.5 \text{ cm/s}$ angeströmten Platten stellen sich nach meist kurzer Zeit periodisch-stationäre Lösungen ein. Platte I schwingt ohne Anfangsauslenkung mit mäßigen Amplituden in zwei Frequenzen $f_1^C = 2.6 \text{ Hz}$ und $f_2^C = 4.21 \text{ Hz}$, welche weder der Platte noch der Strömung zuzuordnen sind. Wird die Platte am Anfang der Berechnung stärker ausgelenkt, schwingt sie mit doppelt so großen Amplituden. Das Frequenzspektrum ändert sich in der Form, dass die Frequenz 2.6 Hz wesentlich stärker vertreten ist und zusätzlich die Frequenz 0.87 Hz einen größeren Einfluss hat. Somit hat das System abhängig von der Ausgangslage zwei periodisch-stationäre Lösungen, was eine Betrachtung des gekoppelten Systems unumgänglich macht.

Wird die zweite Platte verwendet, ändert sich die Systemantwort drastisch. Selbst ohne Anfangsauslenkung schwingt die Platte mit großen Amplituden in einer Frequenz von $f^C = 3.1 \text{ Hz}$. Mit einer Anfangsauslenkung verstärken sich die Wechselwirkungen weiter, so dass das Plattenende zwischen den maximalen Auslenkungen die Distanz einer Plattenlänge zurücklegt. In den dokumentierten Geschwindigkeits- und Druckfeldern sind dabei wesentlich größere Wirbel als bei der starren Platte zu erkennen. Zudem gibt die Wirbelablösefrequenz bei der starren Platte mit $f_1^F = 3.7 \text{ Hz}$ keinen Hinweis auf die gekoppelte Frequenz $f^C = 0.8 \text{ Hz}$, in der die Platte schwingt. Somit ist eine zuverlässige Vorhersage der Antwort des gekoppelten Systems auf Grundlage des entkoppelten Systems nicht möglich.

Die Ergebnisse der Berechnungen mit der größeren Anströmgeschwindigkeit $\bar{v}_2 = 51.3 \text{ cm/s}$ können mit denen von WALL verglichen werden. Wie bei den vorherigen Berechnungen stellt sich bei der ersten Platte schnell eine periodisch-stationäre Lösung ein, die zudem von einer Anfangsauslenkung unabhängig ist. Analog zu WALL schwingt die Platte in ihrer ersten Eigenfrequenz.

Wesentlich interessanter ist das System mit Platte II. Es stellt sich auch über ein sehr langen Zeitraum keine periodisch-stationäre Lösung ein. Die

Amplituden wie auch die dominierenden Frequenzen ändern sich im zeitlichen Verlauf bei der Plattenschwingung und der Fluidkraft sehr stark. Der Grund für das Systemverhalten ist unklar, so dass eindeutige Aussagen nicht getroffen werden können und weitere Analysen des Systems erforderlich sind. Anzumerken bleibt, dass für diese Anwendung keine Konvergenzuntersuchungen mit feineren Netzen vorliegen, da zur Simulation eines Zehn-Sekunden-Intervalls mit dem gewählten Netz bereits eine Woche auf einem Arbeitsplatzrechner, siehe Abschnitt 4.1.4, notwendig ist. Es ist aber zu vermuten, dass, wenn eindeutige Referenzlösungen vorliegen, dieses Beispiel sehr interessant sein kann, um Lösungsstrategien für gekoppelte Systeme zu verifizieren.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein ganzheitliches, monolithisches Berechnungsmodell zur Simulation von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen und starker Kopplung entwickelt.

Wesentlich dabei ist die Verwendung der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode als einheitliches Diskretisierungsverfahren für beide Kontinua. Sie verwendet raum- und zeitabhängige Ansatzfunktionen zur Approximation der Funktionsverläufe der Zustandsgrößen. Die diskretisierten Modellgleichungen führen auf ein Gesamtgleichungssystem, das das gekoppelte System in Raum und Zeit beschreibt. Hierbei werden die Modellgleichungen nicht wie in klassischen semidiskreten Formulierungen in Raum und Zeit getrennt betrachtet. Das betrachtete Raum-Zeit-Gebiet wird bei der Diskretisierung auf ein Finite-Element-Netz abgebildet, welches in der Regel so groß ist, dass es nicht in einem Schritt berechenbar ist. Zur Verkleinerung wird das Gebiet orthogonal zur Zeitachse in Zeit-Scheiben eingeteilt, welche sequenziell berechnet werden. Die Verknüpfung der Zustandsgrößen erfolgt in gewichteter Form mit dem zeitdiskontinuierlichen GALERKIN-Verfahren, womit die C^0 -Stetigkeit an den Zeit-Scheibengrenzen aufgegeben wird. Das Zeitintegrationsverfahren ist für lineare Differenzialgleichungen A-stabil und mit linearen Ansätzen von 3. Ordnung genau. Die räumlich eindimensionale Konvektions-Diffusions-Gleichung dient zur Herleitung der Raum-Zeit-Formulierung. Die Gleichung ermöglicht anhand einer konvektionsdominanten Strömung die Diskussion der verwendeten GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierung.

Als Strukturmodelle dienen elastisch gelagerte Starrkörper und elastische Festkörper, die mit der geometrisch linearen und nichtlinearen Elastizitätstheorie beschrieben werden. Für die Modellierung plattenartiger Strukturen dient eine gemischte Formulierung mit Geschwindigkeiten und Spannungen als Freiwerte, wobei die Spannungen lokal abgelöst werden.

Die Basis des Fluidmodells bilden die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in einer Geschwindigkeits-Druck-Formulierung. Konvektionsdominante Strömungen und gleiche Ansätze für Geschwindigkeiten und Druck

verursachen Oszillationen in der Lösung. Sie werden durch eine GALERKIN / Least-Squares-Stabilisierung verhindert. Da die räumliche Lage der Knoten im Verlauf der Zeit veränderbar ist, lassen sich freie oder an elastischen Strukturen anliegende Oberflächen ohne Anpassung der Modellgleichungen auf elegante Art und Weise beschreiben.

Bei der Fluid-Struktur-Kopplung ist der Kopplungsrand eine Oberfläche des Fluids, dessen räumliche Lage aus den Strukturverschiebungen folgt. Zur Kopplung werden zusätzliche Fluidrandspannungen eingeführt, die die Impuls- und Energieerhaltung über den Rand sicherstellen. Das monolithische Modell führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, das die diskretisierten Modellgleichungen von Fluid, Struktur und Kopplung enthält. Der Formulierung inhärent ist eine starke Kopplung, die die Konvergenz der Lösung absichert. Darüber hinaus ermöglicht das monolithische Berechnungsmodell eine Analyse des gekoppelten Systems – insbesondere im Hinblick auf Stabilitätsanalysen, die ein genaues und effizientes Verfahren mit starker Kopplung benötigen.

Gelöst wird das entstehende gekoppelte, nichtlineare Gleichungssystem mit einer PICARD-Iteration. Innerhalb der Iteration wird das linearisierte Gleichungssystem bei großen Systemen iterativ mit einem BiCGStab-Gleichungslöser gelöst. Zur Beschleunigung der Konvergenz wird neben einem Prädiktor für die Lösung ein direkter Vorkonditionierer eingesetzt.

Das numerische Lösungsverfahren wird ohne Kopplung an verschiedenen elastodynamischen und strömungsmechanischen Aufgabenstellungen verifiziert. Die Berücksichtigung freier Oberflächen erfolgt durch das mitbewegte Fluidnetz und wird anhand eines Dammbruchs und eines Freistrahls untersucht. Ein elastisch gelagerter, starrer Kreiszylinder dient zur Simulation der VON KÁRMÁNSchen Wirbelstraße und des Lock-in-Phänomens. Eine wirbelerregte, elastische Platte im Nachlauf eines Starrkörpers dient zur Berechnung von starken, nichtlinearen Wechselwirkungen, bei denen das Fluidgebiet und die Strömung wesentlich durch die Plattenschwingung beeinflusst werden. Zudem wird bei den Anwendungen die Abhängigkeit der Systemantwort von äußeren Störungen untersucht.

Das entwickelte ganzheitliche, monolithische Berechnungsmodell ermöglicht – abgesichert durch Verifikations- und Validierungsbeispiele – die Simulation von starken, nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Fluid und Struktur. Aufbauend auf dem Berechnungsmodell können weitergehende Analysen und Verfahren, wie beispielsweise Stabilitätsanalysen oder Reduktionsverfahren, am gekoppelten Gesamtsystem durchgeführt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ALONSO, J. J. ; JAMESON, A.: Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions / American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1994. – Technical Note. AIAA-94-0056
- [2] ANAGNOSTOPOULOS, P.: Numerical study of the flow past a cylinder excited transversely to the incident stream. Part 1: Lock-in zone, hydrodynamic forces and wake geometry. In: *Journal of Fluids and Structures* 14 (2000), S. 819–851
- [3] ANAGNOSTOPOULOS, P.: Numerical study of the flow past a cylinder excited transversely to the incident stream. Part 2: Timing of vortex shedding, aperiodic phenomena and wake parameters. In: *Journal of Fluids and Structures* 14 (2000), S. 853–882
- [4] ANAGNOSTOPOULOS, P. ; BEARMAN, P. W.: Response characteristics of a vortex-excited cylinder at low Reynolds numbers. In: *Journal of Fluids and Structures* 6 (1992), S. 39–50
- [5] ATLURI, S. N.: On Hybrid Finite Element Models in Solid Mechanics. In: VICHNEVETSKY, R. (Hrsg.): *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*. Rutgers University (USA)/University of Ghent (Belgium) : AICA, 1975, S. 346–356
- [6] BAJER, C. I.: Adaptive mesh in dynamic problems by the space-time approach. In: *Computers & Structures* 33 (1989), Nr. 2, S. 319–325
- [7] BARRETT, R. ; BERRY, M. ; CHAN, T. F. ; DEMMEL, J. ; DONATO, J. ; DONGARRA, J. ; EIJKHOUT, V. ; POZO, R. ; ROMINE, C. ; VAN DER VORST, H.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. – ISBN 0–89871–328–5

- [8] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Berlin : Springer, 1990
- [9] BEHR, M. ; TEZDUYAR, T. E.: Finite element solution strategies for large-scale flow simulations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 112 (1994), S. 3–24
- [10] BENDIKSEN, O. O.: A new approach to computational aeroelasticity / American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1991. – Technical Note. AIAA-91-0939-CP
- [11] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Berlin : Springer, 1982
- [12] BRAESS, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 2. Berlin : Springer, 1997
- [13] BREMER, C.: *Berichte*. Bd. 86-48 : Algorithmen zum effizienteren Einsatz der Finite-Element-Methode. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1986
- [14] BREZZI, F. ; FORTIN, M.: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. New York : Springer, 1991 (Springer Series in Computational Mathematics)
- [15] BROOKS, A. N. ; HUGHES, T. J. R.: Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 29 (1981), S. 329–349
- [16] BÜRGISSER, M. F.: *Numerische Simulation der freien Wasseroberfläche bei Ingenieurbauten*. Zürich : Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1998
- [17] CURRIE, I. G.: *Fundamental Mechanics of Fluids*. New York : McGraw-Hill, 1974. – ISBN 0-07-014950-X
- [18] DINKLER, D. ; HOFMANN, T. J. ; KRÄTZIG, W. B. ; KRÖPLIN, B. H. ; LINK, M. ; MESKOURIS, K. ; MÜLLER, R. K. ; RAMM, E.: Baustatik, Baudynamik. In: MEHLHORN, G. (Hrsg.): *Der Ingenieurbau: Grundwissen* Bd. 5. Berlin : Ernst & Sohn, 1996. – ISBN 3-433-01571-6

- [19] DORNBERGER, R.: *Effiziente Berechnung transsonischer Umströmungen von elastischen Strukturen*. Bd. 25-98. Stuttgart : Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, 1998
- [20] ERIKSSON, K. ; ESTEP, D. ; HANSBO, P. ; JOHNSON, C.: *Computational Differential Equations*. Cambridge : University of Cambridge, 1996
- [21] ESCHENAUER, H. ; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie*. Mannheim : Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, 1993
- [22] FELDMANN, D.: *Repetitorium der Ingenieurmathematik*. Bd. 3 : Numerische Mathematik. 4. Springe : Binomi, 1993. – ISBN 3–923 923–04–X
- [23] FERZIGER, J. H. ; PERIC, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. Berlin : Springer, 1997. – ISBN 3–540–42074–6
- [24] GRESHO, P. M. ; SANI, R. L.: *Incompressible Flow and the Finite Element Method*. England : John Wiley & Sons, 1998
- [25] GRIEBEL, M. ; DORNSEIFER, T. ; NEUNHOEFFER, T.: *Numerische Simulation in der Strömungslehre: Ein praxisorientierte Einführung*. Braunschweig : Vieweg, 1995. – ISBN 3–528–06761–6
- [26] GROHMANN, B. A.: *Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity*. Universität Stuttgart, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Dissertation, 2001
- [27] HANSBO, P.: The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 96 (1992), S. 239–253
- [28] HANSBO, P.: The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99 (1992), S. 171–186
- [29] HANSBO, P.: Lagrangian incompressible flow computations in three dimensions by use of space-time finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluid* 20 (1995), S. 989–1001
- [30] HOFFMANN, K. A. ; CHIANG, S. T. L. ; SIDDIQUI, M. S. ; PAPADAKIS, M.: *Fundamental Equations of Fluid Mechanics*. Wichita, Kansas : Engineering Education System, 1996. – ISBN 0–9623731–9–2

- [31] HÜBNER, B.: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Braunschweig, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2003
- [32] HÜBNER, B. ; WALHORN, E. ; DINKLER, D.: Strongly coupled analysis of fluid-structure interaction using space-time finite elements. In: *2nd European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*. Cracow, 2001
- [33] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey : Prentice-Hall International, 1987
- [34] HUGHES, T. J. R. ; HULBERT, G. M.: Space-Time Finite Element Methods for Elastodynamics: Formulation and Error Estimates. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 66 (1988), S. 339–363
- [35] HUGHES, T. J. R. ; JANSEN, K.: Finite element methods in wind engineering. In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 46/47 (1993), S. 297–313
- [36] HUGHES, T. J. R. ; LIU, W. K. ; ZIMMERMANN, K.: *Lagrangian-Eulerian finite Element formulation for incompressible viscous flows*. New Jersey : Prentice-Hall International, 1987
- [37] HULBERT, G. M.: Discontinuity-capturing operators for elastodynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 96 (1992), S. 409–426
- [38] HULBERT, G. M.: Time finite element methods for structural dynamics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), S. 307–331
- [39] JIANG, B.: *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Berlin : Springer, 1998. – ISBN 3–540–63934–9
- [40] JOHNSON, A. A. ; TEZDUYAR, T. E.: Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 119 (1994), S. 73–94

- [41] JOHNSON, C.: *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. 3. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. – ISBN 0-521-347-580
- [42] KLINGBEIL, E.: *Variationsrechnung*. Mannheim : Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, 1988
- [43] KNIPPERS, J.: *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau*. Bd. 18 : Eine gemischt-hybride FE Methode für viskoplastische Flächentragwerke unter dynamischen Einwirkungen. Berlin : Technische Universität Berlin, 1993. – ISBN 3-7983-1548-5
- [44] KOOPMANN, G. H.: The vortex wakes of vibrating cylinders at low Reynolds numbers. In: *Journal of Fluid Mechanics* 28 (1967), S. 501–512
- [45] LESOINNE, M. ; FARHAT, C.: Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes and their impact on aeroelastic computations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 134 (1996), S. 71–90
- [46] LI, X. D. ; WIBERG, N.-E.: Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 2131–2152
- [47] LÖHNER, R.: *Applied CFD Techniques: An Introduction based on Finite Element Methods*. Chichester, England : John Wiley & Sons, 2001. – ISBN 0-471-49843-2
- [48] MARCHI, E.: On the free overfall. In: *Journal of Hydraulic Research* 31 (1993), Nr. 6, S. 777–790
- [49] MARTIN, J. C. ; MOYCE, W. J.: An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plate. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* Serie A 244 (1952), S. 312–324
- [50] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. Braunschweig : Vieweg & Sohn, 1999. – ISBN 3-528-03135-2
- [51] MORAND, H. J.-P. ; OHAYON, R.: *Fluid Structure Interaction: Applied Numerical Methods*. Chichester : John Wiley & Sons, 1995. – ISBN 0-471-94459-9

- [52] MORGENTHAL, G.: Fluid-Structure Interaction in Bluff-Body Aerodynamics and Long-Span Bridge Design: Phenomena and Methods / University of Cambridge, Department of Engineering. 2000. – Technical Report. CUED/D-Struct/TR.187
- [53] MURALIDHAR, K. ; BISWAS, G.: *Advanced Engineering Fluid Mechanics*. London : Narosa Publishing House, 1996. – ISBN 81-7319-098-4
- [54] National Aeronautics and Space Administration (NASA), Washington, D.C., U.S.A., <http://www.nasa.gov>
- [55] NATKE, H. G.: *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. Bd. 66 : Baudynamik: Einführung in die Dynamik mit Anwendungen aus dem Bauwesen. Stuttgart : B. G. Teubner, 1989. – ISBN 3-519-02368-7
- [56] NEUMANN, J. ; SCHWEIZERHOF, K.: Analysis of shell structures under transient loading using adaptivity in time and space. In: WUNDERLICH, W. (Hrsg.): *1st European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures, and Coupled Problems in Engineering*. München, 1999
- [57] NOMURA, T.: Finite element analysis of vortex-induced vibrations of bluff cylinders. In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 46 & 47 (1993), S. 587–594
- [58] NOMURA, T.: ALE finite element computations of fluid-structure interaction problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 12 (1994), S. 291–308
- [59] NOMURA, T. ; HUGHES, T. J. R.: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 95 (1992), S. 115–138
- [60] PAPASTAVROU, A.: *Adaptive Finite Element Methoden für Konvektions-Diffusionsprobleme*. Bochum : Graduiertenkolleg Computational Structural Dynamics, Ruhr-Universität Bochum, 1998
- [61] ROSHKO, A.: On the development of turbulent wakes from vortex streets / National Advisory Committee for Aeronautics. 1953. – Technical Note. 2913

- [62] RUSCHEWEYH, H.: *Dynamische Windwirkung an Bauwerken unter Interferenzeinfluß*. Aachen : Fakultät für Bauwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1985
- [63] SARRATE, J. ; HUERTA, A.: ALE formulation for wake flows affecting secondary objects. In: *1st European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures, and Coupled Problems in Engineering*. München, Germany, 1999
- [64] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. 5. Karlsruhe : G. Braun, 1965
- [65] SCHÖN, M.: *Finite Raum-Zeit-Elemente für die numerische Modellierung der instationären Euler-Gleichungen*. Bd. 05-95. Stuttgart : Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, 1995. – ISBN 3-930683-05-9
- [66] SCHWARZ, H. R.: *Methode der finiten Elemente: Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1991 (Teubner-Studienbücher: Mathematik)
- [67] SHAKIB, F. ; HUGHES, T. J. R.: A new Finite element formulation for computational fluid dynamics: IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 87 (1991), S. 35–58
- [68] SHAKIB, F. ; HUGHES, T. J. R. ; JOHAN, Z.: A new finite element formulation for computational fluid Dynamics: X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 89 (1991), S. 141–219
- [69] STEIN, E. ; BARTHOLD, F.-J.: Werkstoffe, Elastizitätstheorie. In: MEHLHORN, G. (Hrsg.): *Der Ingenieurbau: Grundwissen* Bd. 4. Berlin : Ernst & Sohn, 1996. – ISBN 3-433-01570-8
- [70] STEINDORF, J.: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung*. Braunschweig, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2001
- [71] TEZDUYAR, T. E. ; BEHR, M. ; HUGHES, T. J. R.: High Performance Finite Element Computation of Fluid Dynamics Problems. In: HAFEZ, M. (Hrsg.) ; OSHIMA, K. (Hrsg.): *Computational Fluid Dynamics Review 1995*. John Wiley & Sons, 1995, S. 300–321

- [72] TEZDUYAR, T. E. ; BEHR, M. ; LIOU, J.: A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94 (1992), S. 339–351
- [73] TEZDUYAR, T. E. ; MITTAL, S. ; BEHR, M. ; LIOU, J.: A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - The deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94 (1992), S. 353–371
- [74] TEZDUYAR, T. E. ; MITTAL, S. ; RAY, S. E. ; SHIH, R.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 95 (1992), S. 221–242
- [75] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik*. Bd. 1 & 2. Berlin : Springer, 1996. – ISBN 3–540–58512–5
- [76] VOIGT, A. ; WLOKA, J.: *Hilberträume und elliptische Differentialoperatoren*. Zürich : Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, 1975
- [77] WALL, W. A.: *Berichte des Instituts für Baustatik*. Bd. 31 : Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen. Stuttgart : Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999. – Dissertation
- [78] WALLMERSPERGER, T. ; GROHMANN, B. A. ; KRÖPLIN, B.: Time-discontinuous stabilized space-time finite elements for PDEs of first- and second-order in time. In: WUNDERLICH, W. (Hrsg.): *1st European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures, and Coupled Problems in Engineering*. München, 1999
- [79] WEISS, R.: *Mathematical Research*. Bd. 97 : Parameter-Free Iterative Linear Solvers. Berlin : Akademie, 1996. – ISBN 3–05–501763–3
- [80] WIBERG, N.-E. ; EKEVID, T. ; LI, X.: Wave propagation in solids by adaptive DG-FE-procedure. In: WUNDERLICH, W. (Hrsg.): *1st European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures, and Coupled Problems in Engineering*. München, 1999

- [81] XUE, W-M. ; KARLOVITZ, L. A. ; ATLURI, S. N.: On the existence and stability conditions for mixed-hybrid finite element solutions based on Reissners's variational principle. In: *International Journal of Solids and Structures* 21 (1985), Nr. 1, S. 97–116
- [82] YOUNG, D. L. ; CHANG, J. T.: Wind-structure interaction by the numerical simulation. In: SOLARI, G. (Hrsg.): *Proceedings of the 2nd European & African Conference on Wind Engineering* Bd. 2. Genova, Italy, 1997, S. 1143–1150
- [83] ZIELKE, W.: *Stömungsmechanik für Bauingenieure, Vorlesungsskript Teil I & II*. Universität Hannover : Institut für Stömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, 1992
- [84] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method*. Bd. I, II & III. 5. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. – ISBN 0750650494

Berichte aus dem Institut für Statik ab 1991

(vollständige Liste siehe Homepage des Instituts)

- | | |
|-----------|---|
| Nr. 91-63 | S. KIELBASSA: Standsicherheit der Tunnelortsbrust bei Vortrieb in wassergesättigtem Ton (1991). |
| Nr. 91-64 | R. MEYER: Mehraxiales Werkstoffmodell für Beton mit einheitlichem Konzept im Vor- und Nachbruchbereich (1991). |
| Nr. 91-65 | L. PISARSKY: Zur Berechnung nichtmonoton beanspruchter wassergesättigter Tonböden (1991). |
| Nr. 91-66 | I. SOLIMAN: Ebene und räumliche Spannungs- und Verformungszustände von zwei nacheinander aufgefahrenen Tunnelröhren (1991). |
| Nr. 92-67 | K. KREMER: Randelement-Methode für elastisch-plastische Strukturberechnungen im Grundbau und ihre Kopplung mit der Finite-Element-Methode (1992). |
| Nr. 91-68 | Z. HUANG: Beanspruchungen des Tunnelausbaus bei zeitabhängigem Materialverhalten von Beton und Gebirge (1991). |
| Nr. 93-69 | G. KRACHT: Erschließung viskoplastischer Stoffmodelle für thermomechanische Strukturanalysen (1993). |
| Nr. 92-70 | E.-R. TIRPITZ: Elasto-plastische Erweiterung von viskoplastischen Stoffmodellen für Metalle (1992). |
| Nr. 92-71 | H. BRAASCH: Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Werkstoffmodelle (1992). |
| Nr. 93-72 | B. HU: Berechnung des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Verhaltens von Flächentragwerken aus Stahl unter hohen Temperaturen (1993). |
| Nr. 93-73 | C. ZHANG, M. SCHMIDT, G. STAUPENDAHL, U. HEEMANN: Entwicklung eines Stoffansatzes zur Beschreibung des Kompaktionsverhaltens von Salzgrus, GSF-Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit, Institut für Tieflagerung (1993). |
| Nr. 93-74 | S. MATTHIESEN: Standsicherheitsuntersuchungen für Salzbergwerke mit vertikalen Kammerabbauen (1993). |
| Nr. 93-75 | Mitarbeiter des Instituts: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Heinz Duddeck zur Vollendung des 65. Lebensjahres gewidmet (1993). |
| Nr. 93-76 | G. TRANEL: Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie (1993). |

- Nr. 93-77 J. HUCKFELDT: Thermomechanik hydratisierenden Betons - Theorie, Numerik und Anwendung - (1993).
- Nr. 94-78 U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994).
- Nr. 95-79 N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995).
- Nr. 95-80 N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995).
- Nr. 97-81 H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997).
- Nr. 96-82 T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996).
- Nr. 97-83 T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997).
- Nr. 97-84 B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997).
- Nr. 97-85 U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997).
- Nr. 97-86 E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997).
- Nr. 98-87 I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998).
- Nr. 99-88 C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999).
- Nr. 2000-89 H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000).
- Nr. 2000-90 A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000).
- Nr. 2001-91 J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001).
- Nr. 2001-92 J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001).

- Nr. 2002-93 B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002).
- Nr. 2002-94 R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002).

Vorlesungsmanuskripte

- Nr. 73-6 SEMINAR TRAGLASTVERFAHREN: Grundlagen und Anwendungsbeispiele (2. Auflage, 1973).
- Nr. 88-50 H. AHRENS UND D. DINKLER: Finite-Element-Methoden Teil I (1994).
- Nr. 88-51 H. AHRENS UND D. DINKLER: Finite-Element-Methoden Teil II (1996).

Sonderdrucke

„Festschrift Heinz Duddeck“, zum 60. Geburtstag (1988).
Herausgeber: J. Scheer, H. Ahrens, H.-J. Bargstädt
41 Beiträge zu Statik, Numerik, Stahlbau, Stahlbetonbau,
Grundbau und Tunnelbau aus Praxis und Forschung

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens,
Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).
Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8,
Tagungsband zur Fachtagung in Braunschweig (2002).
Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig
Telefon 0531/391-3667, Telefax 0531/391-8116
E-Mail statik@tu-bs.de
Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>